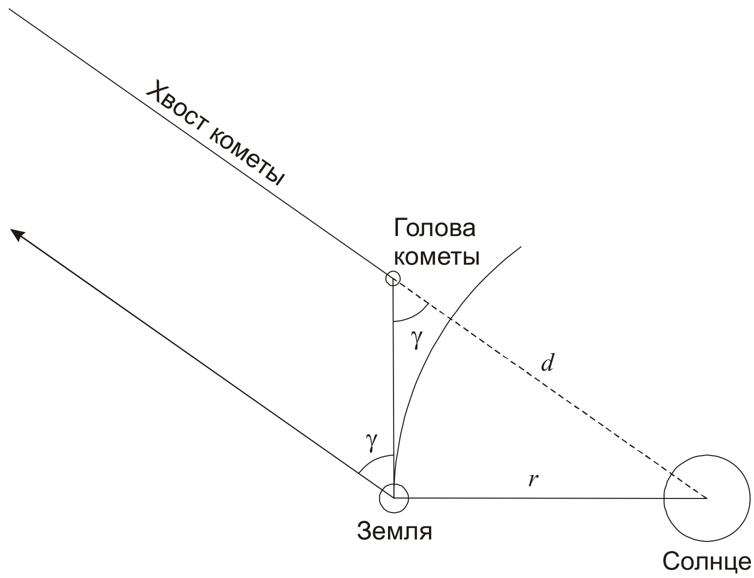
Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Заключительный этап – 2021 год
Первый (базовый) тур

БАЗОВЫЙ ТУР

9.1. НЕБЕСНАЯ ГОСТЬЯ

Условие. Яркая комета располагается в 1.20 а.е. от Солнца. У нее появился тонкий прямой газовый хвост, направленный в пространстве точно от Солнца. Найдите максимально возможную угловую длину хвоста этой кометы в небе Земли. Орбиту Земли считать круговой.

Решение. Изобразим на рисунке положение Солнца, Земли и ядра кометы в плоскости, проходящей через эти три объекта (она может не совпадать с плоскостями орбиты Земли или кометы).



Обозначим гелиоцентрические расстояния Земли и кометы как r и d, принимая во внимание, что $d>r$. Хвост кометы направлен в пространстве от Солнца, и в небе Земли он не может зайти дальше направления, показанного на рисунке стрелкой. Обозначим максимальную угловую длину хвоста кометы через γ. Из рисунка мы видим, что он будет равен элонгации Земли при наблюдении с кометы. Она достигает максимума, если угол «Солнце-Земля-ядро кометы» прямой, и направление от кометы к Земле касается окружности с радиусом r, содержащей Землю (еще раз подчеркнем, что это не обязательно орбита Земли, так как про плоскость орбиты кометы в условии ничего не сказано). В итоге, максимальная длина хвоста кометы в небе Земли составит

$$\gamma = \arcsin(r/d) = 56°.$$

Система оценивания, максимум – 10 баллов:

<u>1 этап – 6 баллов:</u> Графическое или текстовое указание, в каком случае будет достигаться максимальная угловая длина хвоста кометы в небе Земли – ее удаление на небе на 90° от Солнца (квадратура кометы). При иной формулировке условия она должна быть эквивалентна приведенной выше. Участник олимпиады может рассматривать картину только

в плоскости эклиптики, называя окружность, дуга которой приведена на рисунке, орбитой Земли. Это не сказывается на оценке при условии верного выполнения.

<u>2 этап – 4 балла:</u> определение численного значения угла γ. Требуемая точность – 2°. При правильной формуле и ошибке до 4° выставляется 3 балла, при ошибке до 6° – 2 балла. При неверной постановке условия на угол γ (неверно выполненном первом этапе) оценка за второй этап определяется точностью вычислений, исходя из формулы, полученной участником, но не превышает 2 баллов.

Вероятная ошибка участника – правильное представление положения кометы (первый этап), но вместо arcsin дается формула с arccos (ответ 34°), arctg (40°), arcctg (50°). В этом случае второй этап засчитывается не более, чем в 1 балл.

Возможная грубая ошибка участника – построение, при котором длина хвоста кометы, удаленной от Солнца более, чем на 1 а.е., может превысить 90°. Если подобный ответ получается как следствие неправильного построения – оценка за решение составляет 0 баллов.

9.2. РАЗЛИЧИТЬ НЕРАЗЛИЧИМОЕ

Условие. В Ваше распоряжение попал наземный телескоп со специальным прибором, позволяющим разрешать видимые диски далеких звезд, если их угловой диаметр не меньше 0.02″. Какими могут быть эффективные температуры звезд, диски которых Вы сможете различить? Атмосферные помехи и межзвездное поглощение не учитывать.

Решение. Пусть некоторая звезда имеет пространственный радиус R. Чтобы Вы смогли различить ее диск, она должна быть удалена от Земли на расстояние d, не превышающее $2R/\delta$. Здесь δ – предел разрешения прибора, выраженный в радианах (около 10^{-7}). Если эффективная температура звезды T, то ее светимость будет равна

$$B = B_0\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^4. \tag{1}$$

Здесь R_0, T_0 и B_0 – радиус, эффективная температура и светимость Солнца. Соотношение плотностей потока энергии на Земле от этой звезды и от Солнца составит

$$\frac{J}{J_0} = \frac{B/4\pi d^2}{B_0/4\pi d_0^2} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{d_0}{d}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^4. \tag{2}$$

Здесь d_0 – расстояние от Земли до Солнца. Теперь обратим внимание, что за исключением двух звезд (Сириуса и Канопуса), которые будут рассмотрены отдельно, все далекие звезды на земном небе не превосходят в блеске 0^{m}. С учетом того, что Солнце в небе Земли имеет блеск -26.8^{m}, соотношение J/J_0 не выше $1/K$, где

$$K = 10^{0.4\cdot 26.8} = 5.2\cdot 10^{10}. \tag{3}$$

Из этого имеем:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \le \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{d}{d_0}\right)^2 = \frac{\delta_0^2}{4K}\left(\frac{d}{R}\right)^2 \le \frac{\delta_0^2}{K\delta^2}. \tag{4}$$

Здесь δ_0 – угловой диаметр Солнца, равный $9.3\cdot 10^{-3}$ радиан. В итоге, отношение в правой части уравнения (4) оказывается равным 0.18. Температура звезд, у которых можно различить диски, не превысит $T_0\cdot 0.18^{1/4}$ = 3800 K. Список звезд с угловым диаметром более 0.02″ в небе Земли ограничивается лишь немногочисленными красными гигантами и сверхгигантами, самый известный из которых – Бетельгейзе – первая далекая звезда, для которой удалось построить изображение.

Возвращаясь к Сириусу и Канопусу, отметим, что обе эти звезды горячие, с температурой поверхности более 7500 K. Имей они угловой диаметр 0.02″, их видимая звездная величина была бы не слабее -3^{m}, что заведомо не соответствует действительности. Даже у звезд солнечного типа диск удалось бы различить при блеске ярче -1.8^{m}, таких звезд на ночном небе Земли нет.

Система оценивания, максимум – 10 баллов:

Выше приведен только один метод решения. Участники могут действовать по-другому, например, сразу использовать тот факт, что поверхностная яркость звезды определяется только ее температурой, будучи пропорциональной ее четвертой степени, это вполне допустимо. Далее они могут определять поверхностные яркости звезды 0^m с угловым диаметром 0.02″ и сравнить ее с поверхностной яркостью Солнца. При использовании метода, описанного выше, решение разделяется на этапы:

1 этап – 4 балла: установление связи между видимой яркостью звезды, ее угловым диаметром и температурой (формула (2) в решении или эквивалентная запись). Из записи участника должна следовать пропорциональность квадрату углового радиуса (диаметра) и четвертой степени температуры. Запись может не делаться в явном виде, но быть фактически включенной в выкладки участника. Так же оценивается прямая связь поверхностной яркости и четвертой степени температуры. При качественно неверной зависимости (неправильные показатели степени) этап не засчитывается.

Вероятная ошибка в решении участника: ошибочные численные коэффициенты 2 или 4, вызванные путаницей между угловым или видимым радиусом и диаметром. Оценка за этап уменьшается на 2 балла, остальные оцениваются в полной мере.

2 этап – 3 балла: привлечение дополнительной информации о максимальной яркости звезд ночного неба. Оценивается полностью, если принимаются значения от -0.7^m (блеск Канопуса) до 0.5^m (максимальный блеск Бетельгейзе – известной участникам звезды с большим угловым диаметром). При дальнейших правильных вычислениях это даст граничные итоговые температуры 4400 и 3300 K соответственно. Таким образом, включение в список звезд – кандидатов на разрешение диска Канопуса не приводит к уменьшению оценки. Если в этом качестве берется блеск Сириуса (около -1.5^m, итоговая температура 5300 K), оценка снижается на 1 балл, так как участникам должно быть известно, что Сириус по крайней мере горячее Солнца, а холодных звезд с большими угловыми диаметрами и такой большой видимой яркостью на ночном небе нет. Если данная звездная величина берется в интервале от 0.5^m до 1.0^m – оценка также снижается на 1 балл, при больших отклонениях – этап не засчитывается, но дальнейшие этапы в этом случае оцениваются в полной мере, исходя из правильности их выполнения.

3 этап – 3 балла: вычисление максимальной эффективной температуры. Точность (без учета ошибок на предыдущих этапах) составляет 500K, при ошибках до 1000K оценка снижается на 1 балл, при ошибках до 1500K – на 2 балла.

9.3. МИГАЮЩИЙ ГЛАЗ МЕДУЗЫ

Условие. В местную полночь на 16 сентября на экваторе Земли астроном отметил, что затменная переменная звезда Алголь достигла своего главного минимума. Сколько еще главных минимумов Алголя сможет наблюдать этот астроном невооруженным глазом в этом пункте в последующие три недели? В какие дни (по местному времени) они произойдут? Координаты Алголя равны α = 3ч08м, δ = +41.0°, период – 2.867 суток. Считать, что Луна не мешает наблюдениям, а погода всегда безоблачная. Считать минимум звезды мгновенным событием.

Решение. Для начала выясним, сколько еще минимумов Алголя произойдет за оставшиеся три недели. Для этого 21 день разделим на период Алголя и отбросим остаток. Мы получаем число 7. Даты и время последующих минимумов занесем в таблицу (см. ниже, *t* – время от момента первого наблюдения).

Препятствовать наблюдению может два фактора. Во-первых, днем наблюдения невооруженным глазом невозможны. Во-вторых, необходимо, чтобы Алголь находился над горизонтом. Поскольку наблюдения проводятся на экваторе, восход Солнца происходит примерно в 6 часов, а заход – в 18 часов по местному времени. Надо также учесть, что как минимум в светлые гражданские сумерки наблюдения также провести не удастся. Примем, что для начала наблюдений Солнце должно опуститься под горизонт на 6°, уравнением времени пренебрежем. В дальнейшем мы сможем понять, насколько эти наши предположения влияют на результат.

Наблюдения проходят вблизи дня равноденствия, следовательно, Солнце находится около небесного экватора. Для того, чтобы опуститься на 6° под горизонт, Солнцу требуется 24 минуты. Тогда наблюдения возможны с 18ч24м до 05ч36м по местному времени. Таким образом, можем сделать вывод, что минимумы со второго по пятый произойдут днем. Картина не меняется, если в качестве интервала наблюдений мы выберем навигационные сумерки (погружение Солнца под горизонт на 12°).

№	t, сут	Дата	Время, час:мин	Положение Солнца	Положение Алголя
1	2.867	18.09	20:49	Под горизонтом (-43°)	Под горизонтом
2	5.734	21.09	17:37	Над горизонтом	Под горизонтом
3	8.601	24.09	14:25	Над горизонтом	Под горизонтом
4	11.468	27.09	11:14	Над горизонтом	Под горизонтом
5	14.335	30.09	08:02	Над горизонтом	Над горизонтом
6	17.202	3.10	04:51	Под горизонтом (-15°)	Над горизонтом
7	20.069	6.10	01:39	Под горизонтом (-61°)	Над горизонтом

Определим положение Алголя относительно горизонта в первый, шестой и седьмой минимумы. Поскольку нам нужно определить это положение довольно приблизительно, то разумно предположить, что все наблюдения происходят в день осеннего равноденствия. Если мы получим положение Алголя близким к горизонту, то результат можно будет уточнить.

В день осеннего равноденствия звездное время равно солнечному. Известно, что звездное время равно прямому восхождению звезд, находящихся в верхней кульминации. Первый минимум произойдет в 20:49, а значит, над горизонтом окажутся звезды с прямым восхождением от 14ч49м до 2ч49м. Последняя величина близка к прямому восхождению Алголя, поэтому требуется уточнение.

Событие происходит вечером 18 сентября, т. е. примерно за 4 дня до равноденствия. В этот день прямое восхождение Солнца примерно на 4м×4 = 16 минут меньше, а значит в указанное время кульминируют звезды с прямым восхождением на 16 минут меньше. Таким образом, в 20:49 будет происходить верхняя кульминация звезд с прямым восхождением 20ч33м. Часовой угол Алголя составит −6ч35м, т. е. Алголь заведомо оказывается под горизонтом. Ни уравнение времени, не превосходящее по модулю 16 минут, ни атмосферная рефракция у горизонта, равная во временной мере 2 минутам, этот вывод не изменят.

Во время шестого и седьмого минимума Алголь будет располагаться высоко над горизонтом, так как звездное время будет отличаться от его прямого восхождения менее, чем на 2 часа, отличие даты от момента осеннего равноденствия здесь не играет роли. Итак, наблюдатель имеет возможность наблюдать только два главных минимума за оставшиеся 3 недели, они произойдут утром 3 и 6 октября.

Следует отметить, что во время пятого минимума Алголь также будет находиться над горизонтом. Но вместе с ним над горизонтом будет находиться Солнце. Ни один из описанных минимумов не приходится на сумерки, поэтому ответ в задании не зависит от точного выбора момента окончания светлых сумерек. Погружение Солнца под горизонт на 15° во время шестого минимума соответствует астрономическим сумеркам, когда на большой высоте над горизонтом видны даже слабые звезды.

Система оценивания, максимум – 10 баллов:

1 этап – 2 балла: определение моментов минимумов блеска Алголя. Для минимумов 2-5 требуется точность, достаточная для четкого дальнейшего указания, что эти минимумы попадут на дневное время. Для минимума 7 также достаточно точности около 1 часа для формулировки правильного вывода по этому минимуму. Для минимумов 1 и 6 нужна точность порядка 15 минут, так как при больших ошибках это может привести к неверному итоговому ответу. При больших ошибках оценка уменьшается на 1 балл за каждый из неверно определенных минимумов (однако, оценка за весь этап не может быть меньше 0 баллов). В случае, если количество последующих минимумов отличается от 7, этап не засчитывается полностью, но последующие оцениваются, исходя из точности их выполнения.

2 этап – 2 балла: анализ фактора дня и ночи для наблюдений Алголя. Для того, чтобы этап был засчитан, должно быть правильно сформулировано и использовано условие наступления дня. Учет фактора сумерек обязателен, при этом любое ограничение периода сумерек в интервале погружения Солнца от 6 до 12 градусов считается правильным. При этом фактор сумерек может оговариваться как на этом этапе, так и при анализе окончательных ответов, что тоже верно. При иных интервалах или игнорировании эффекта сумерек оценка снижается на 1 балл.

3 этап – 2 балла: анализ фактора нахождения Алголя над горизонтом. Аналогично предыдущему этапу, необходима формулировка условия (модуль часового угла или разницы звездного времени и прямого восхождения Алголя не менее 6 часов). Однако, если часовой угол получается близким по модулю к 6 часам (от 5ч30м до 6ч30м), необходим точный анализ с учетом даты минимума. При его отсутствии оценка снижается на 1 балл.

Учет факторов рефракции и уравнения времени не является обязательным. Его наличие не влияет на оценку, если он выполнен правильно.

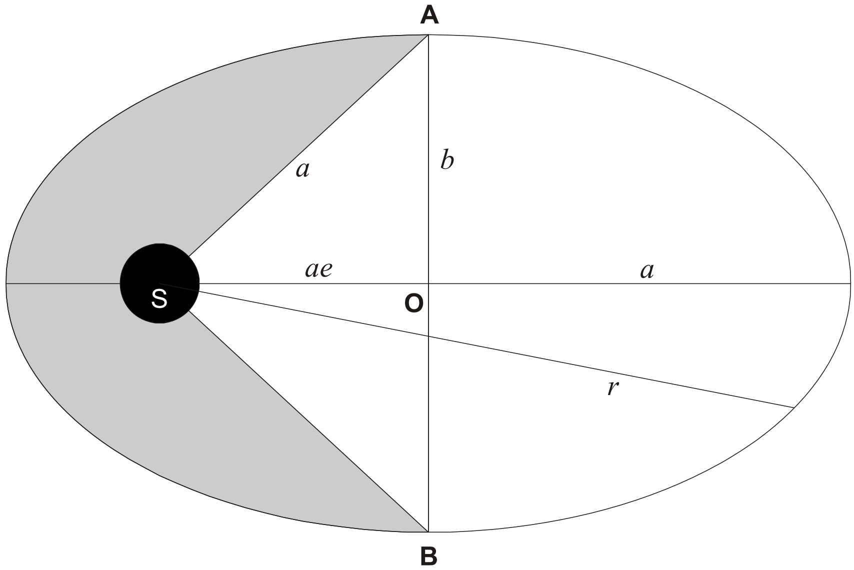
4 этап – 2 балла: указание количества минимумов, которые удастся зафиксировать. Засчитывается только при правильном ответе и правильно найденных наблюдаемых минимумах.

5 этап – 2 балла: указание дат минимумов (по одному баллу за каждый). Этап засчитывается, если указаны обе даты наблюдаемых минимумов, при этом оценка не снижается, если вместе с этими правильными датами указаны другие, не отфильтрованные на предыдущих этапах решения (в этом случае снижение оценки идет на предыдущих этапах).

9.4. ВЫЖИТЬ В КАТАСТРОФЕ

Условие. Звезда – красный гигант обладает системой из очень большого количества планет, движущихся по орбитам с одинаковыми эксцентриситетами. В один момент звезда быстро сбрасывает оболочку, уносящую ровно половину массы гиганта. Тем не менее, 70% планет в итоге остались в системе звезды. Определите эксцентриситет орбит планет до сброса оболочки. Считать, что оболочка рассеивается очень быстро, ее взаимодействие с планетами с момента сброса, а также взаимодействие планет между собой не учитывать. Все планеты несравнимо меньше звезды по массе.

Решение. Рассмотрим планету на орбите с эксцентриситетом e вокруг красного гиганта:



Как известно, скорость планеты на некотором расстоянии r от звезды равна

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}, \quad (1)$$

где M – масса звезды, a – большая полуось орбиты. После быстрого сброса половины массы звезды планета останется на орбите около звезды, если ее скорость будет меньшей, чем вторая космическая скорость относительно тела с массой (M/2) на расстоянии r:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} < \sqrt{\frac{2G(M/2)}{r}}. \quad (2)$$

Из этого мы получаем условие сохранения планеты в системе звезды: $r>a$, то есть планета в момент сброса должна находиться от звезды на большем расстоянии, чем большая полуось своей орбиты.

Проведем на эллипсе его большую и малую оси. Малая ось пересекает эллипс в точках **A** и **B**. Как следует из свойств эллипса, именно в этих точках расстояние от центра звезды (фокуса эллипса, точки **S**) равно a. Иными словами, если в момент сброса оболочки планета окажется в левой половине своей орбиты – она покинет систему, если в правой – останется в ней. Времена нахождения планеты в этих половинах отличается, в соответствии с II законом Кеплера, они относятся так же, как площади серой и белой частей эллипса на рисунке.

Длина малой полуоси эллипса есть

$$b = a\sqrt{1-e^2}. \tag{3}$$

Площадь всего эллипса S_0 есть πab, площадь треугольника **SOA** на рисунке, S_T, равна $abe/2$. Определим, какая часть площади эллипса приходится на его белую область на рисунке. Эта область состоит из правой половины эллипса и двух треугольников с площадью S_T каждый:

$$P = \frac{(S_0/2)+2S_T}{S_0} = \frac{ab\cdot((\pi/2)+e)}{\pi ab} = \frac{1}{2}+\frac{e}{\pi}. \tag{4}$$

Полученная величина есть вероятность планеты в момент сброса оболочки остаться на эллиптической орбите около звездного остатка. Она нам задана в условии и равна 0.7. Отсюда мы получаем эксцентриситет планетных орбит в системе до сброса оболочки:

$$e = \pi\,(P - 1/2) = 0.63. \tag{5}$$

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 3 балла:</u> указание, из какой части орбиты планета может улететь из системы звезды при потере 50% ее массы, а в каком случае она останется в системе. Вывод может быть указан как известный без математических выкладок. Этап оценивается только в случае вывода о равных частях эллипса, иначе за этап выставляется 0 баллов.

<u>2 этап – 5 баллов:</u> связь вероятности сохранения планеты в системе и изначального эксцентриситета орбиты.

При неточной связи члену жюри нужно проверить связь участника на осмысленность. Если вероятность, в соответствии с решением участника, равна 0.5 при $e=0$, далее возрастает с эксцентриситетом, но не превышает единицу при $e<1$, то эта неточная связь оценивается до 2 баллов с сохранением оценки за последующий этап. Если при этом отличие вероятности от верной не превышает 0.1 на всем интервале эксцентриситетов от 0 до 1, оценка за этап увеличивается до 3 баллов. При нарушении одного из двух указанных критериев ($P(0)$=0.5 и P<1) максимальная оценка за этап составляет 1 балл, при нарушении обоих критериев этап не засчитывается.

Вероятная ошибка при решении: указание, что вероятность равна 50%, так как соответствующие дуги эллипса одинаковые. Вывод противоречит условию и лишает смысла второй и третий этапы решения. Засчитан может быть только первый этап решения.

<u>3 этап – 2 балла:</u> вычисление эксцентриситета орбит планет. Ошибки на втором этапе не влияют на оценку за 3 этап, если в итоге 2 этапа была получена неабсурдная связь $P(e)$. Требуемая точность – 0.05 (ответ 0.6 при правильных выкладках считается верным).

Вероятное неверное решение участника: связь сохранения большинства планет с возможными резонансами и одновременном нахождении планет вблизи апоцентров орбит в момент сброса оболочки. Такое решение несостоятельно ввиду очень большого числа планет, что указано в условии. Вне зависимости от решения оценка не может превышать 2 баллов.

9.5. ГАЛАКТИЧЕСКИЙ ТАРАН

Условие. Шаровое звездное скопление состоит из 500 тысяч одинаковых звезд со светимостью, втрое меньшей солнечной. В небе Земли оно имеет звездную величину 6.0^m и угловой диаметр 30′. Через некоторое время шаровое скопление пролетит сквозь диск нашей Галактики под углом 20° к его плоскости. Оцените, сколько звезд солнечного типа в результате на какое-то время окажутся внутри скопления, если сейчас они расположены в диске однородно, а блеск соседней такой звезды (α Центавра) в нашем небе равен 0^m. Толщина диска составляет 300 пк, движением звезд диска, их гравитационным взаимодействием со скоплением и межзвездным поглощением света пренебречь.

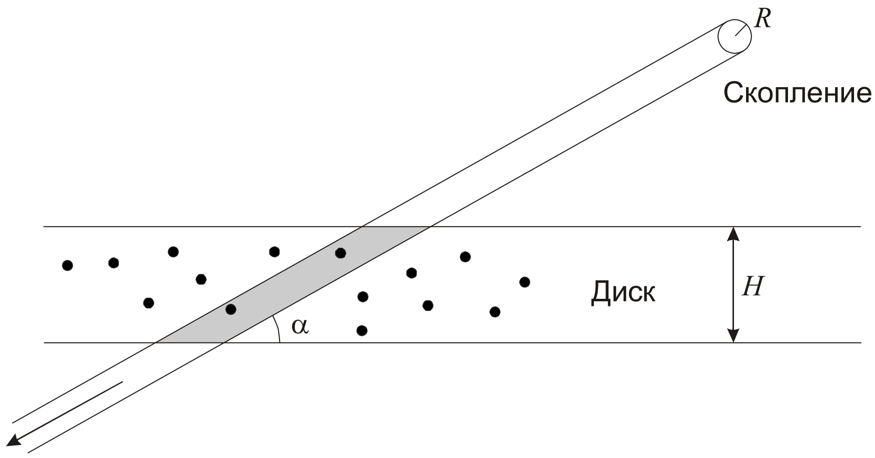
Решение. Шаровое скопление состоит из 500 000 звезд, каждая из которых светит втрое слабее Солнца. Отсюда мы можем определить абсолютную звездную величину скопления:

$$M_C = M_0 - 2.5\lg\frac{500000}{3} = -8.3. \qquad (1)$$

Здесь M_0 – абсолютная звездная величина Солнца. Нам известна видимая звездная величина скопления в небе m_C, при этом мы пренебрегаем межзвездным поглощением света. Тогда мы можем найти расстояние до скопления L:

$$\lg L = 1 + \frac{m_C - M_C}{5}; \quad L \approx 7000\ \text{пк}. \qquad (2)$$

Зная угловой диаметр скопления в небе δ и выражая его в радианах, мы определяем радиус скопления $R = L\delta/2 = 30$ пк. При пролете сквозь диск Галактики скопление вырежет в нем фигуру, по объему равную цилиндру с радиусом R и высотой $H/\sin\alpha \approx 900$ пк (см. рисунок):



Объем части диска, который попадет внутрь скопления за время его пролета, равен $V=\pi R^2 H/\sin\alpha = 2.5\cdot 10^6$ пк^3. Нам нужно определить, сколько звезд солнечного типа попадет в эту область. Для этого определим характерное расстояние между звездами в диске как расстояние между Солнцем и α Центавра:

$$\lg d = 1 + \frac{m_A - M_0}{5}; \quad d \approx 1.1\ \text{пк}. \qquad (3)$$

Мы получили несколько заниженную оценку расстояния до α Центавра, предположив, что ее абсолютная звездная величина совпадает с солнечной. Можно использовать и реальное расстояние до этой звезды (1.3 пк). Считая, что одна звезда содержится в диске в объеме d^3, оценим, сколько звезд попадет в скопление:

$$N \sim V/d^3 \sim (1\text{-}2)\cdot 10^6. \qquad (4)$$

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 2 балла:</u> определение расстояния до скопления. Может выполняться через вычисление абсолютной звездной величины скопления, как сделано выше либо через вычисление видимой звездной величины одной звезды скопления в небе Земли. Этап предполагает применение формулы Погсона и связи расстояния, видимой и абсолютной звездной величины. Участник может пытаться учесть покраснение звезд скопления малой массы, что незначительно сказывается на их визуальной звездной величине. Требуемая точность – 1000 пк, при ошибке до 2000 пк оценка уменьшается на 1 балл. Если полученное расстояние не является абсурдным (попадает в интервал от 1000 до 30000 пк) – ошибка не влияет на оценивание последующих этапов, иначе они оцениваются только наполовину.

Вероятная ошибка: опускание фактора 1/3, связанного с низкой светимостью звезд скопления, с итоговой ошибкой порядка 1.7 раз. Оценка за этап не превышает 1 балл (0 баллов, если делаются иные ошибки).

<u>2 этап – 2 балла:</u> Определение радиуса (либо диаметра) скопления. Требуемая точность – 5 пк (для диаметра – 10 пк). Может выполняться численно либо в аналитическом виде для подстановки в формулы для последующих этапов.

<u>3 этап – 2 балла:</u> определение объема фигуры, которую вычертит скопление при пролете сквозь диск Галактики. Также может выполняться численно либо аналитически, при численном методе требуемая точность достаточна на уровне 30% ($\sim 10^6$ пк^3).

Вероятная ошибка: опускание эффекта $\sin\alpha$ – наклона пути скопления к галактическому диску, что приводит к трехкратному занижению объема. В этом случае весь третий этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере.

<u>4 этап – 2 балла:</u> определение расстояния до ближайшей звезды солнечного типа. Требуемая точность – 0.3 пк. Участники могут считать звезду α Центавра аналогом Солнца, могут использовать свои знания об ее характеристиках или даже использовать ее фактическое расстояние, что также считается правильным.

<u>5 этап – 2 балла:</u> оценка количества звезд, которые попадут внутрь скопления. Ввиду резкой зависимости от расстояния между звездами d, итог может быть определен с точностью до фактора 2.

Ошибки на каждом этапе не влияют на последующие этапы, если полученные значения не оказываются заведомо нехарактерными для шаровых скоплений или множества звезд в диске Галактики.

9/10.6. МАРАФОН МЕССЬЕ

Условие. «Марафоном Мессье» называется визуальное наблюдение в телескоп всех объектов каталога Мессье из одной точки Земли в течение одной ночи. Определите, на какой самой северной широте Земли можно провести этот марафон в ночь весеннего равноденствия. Считать, что любой объект каталога Мессье можно увидеть, если Солнце опустилось под горизонт хотя бы на 12 градусов, вне зависимости от характеристик объекта, если только он находится над горизонтом. Поглощение света и атмосферную рефракцию не учитывать.

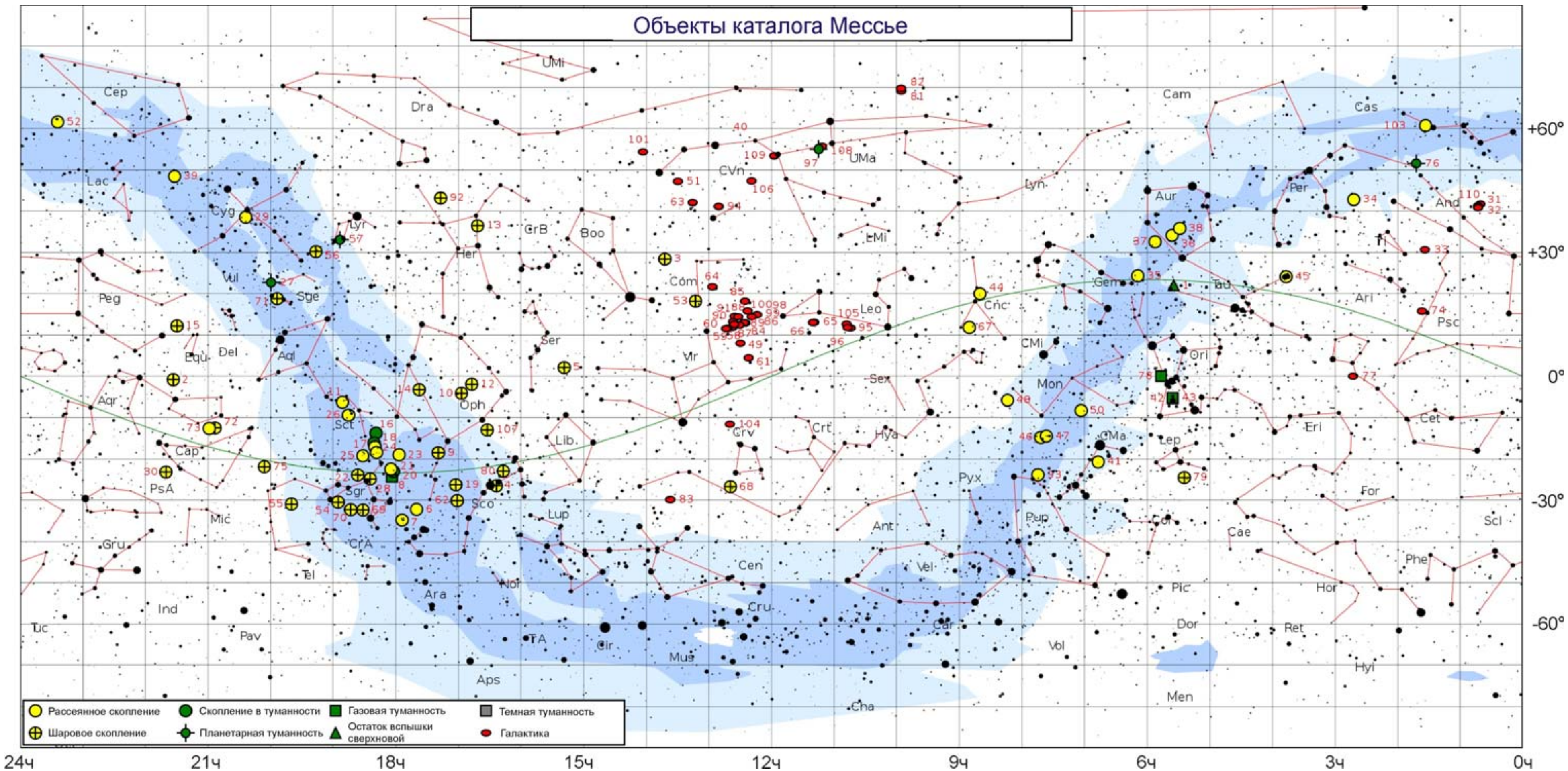
Вам выдана звездная карта с объектами каталога Мессье, указанными символами, описанными в левом нижнем углу рисунка. Около объектов указаны их номера по каталогу Мессье. Приведена также координатная сетка на эпоху 2000 года. Считайте, что наблюдения проводятся в ту же эпоху.

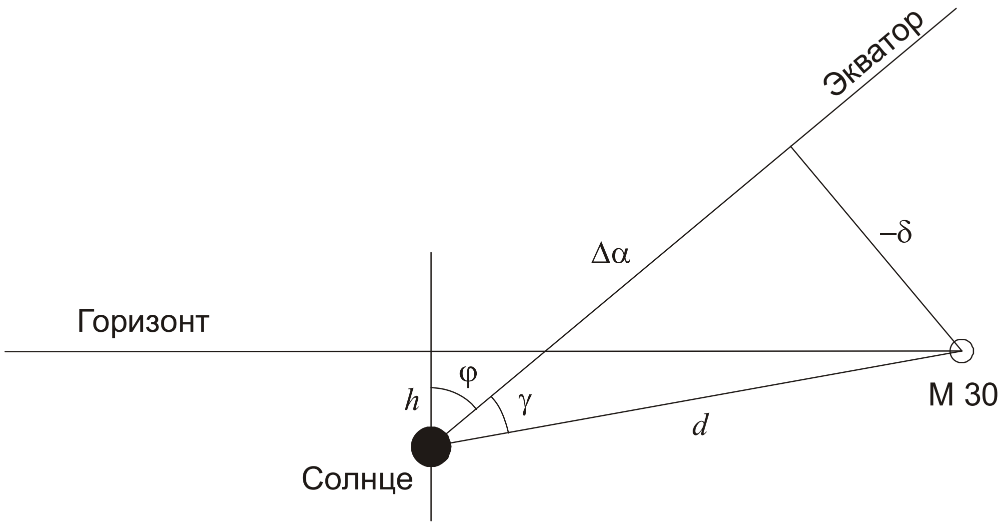
Решение. Первое ограничение на широту наблюдения всех объектов каталога Мессье, о котором можно подумать, связано с появлением над горизонтом южных объектов этого каталога. Самый южный объект – рассеянное скопление M7 – имеет склонение около $-35°$ и восходит на широтах до +55°. Однако есть и другие, более сильные ограничения на широту места, связанные с расположением объектов на небе относительно Солнца.

Наблюдения происходят вблизи весеннего равноденствия, когда координаты Солнца составляют (0ч, 0°). Вечером, следом за Солнцем, заходят области неба с большим прямым восхождением, причем в северном полушарии объекты южного небесного полушария делают это раньше, а объекты северного небесного полушария – позже. В правой части карты мы видим, что объектов каталога Мессье южнее экватора там нет, галактика M77 находится на экваторе почти на 3ч восточнее Солнца, она будет достаточно хорошо видна вечером в северных умеренных широтах. Ближе всего к Солнцу располагается галактика M74, но и ее элонгация существенно больше 12°, а северное склонение дает возможность наблюдаться в северных широтах.

Иная ситуация складывается на предрассветном небе. В каталоге Мессье есть объекты с прямым восхождением 21-22ч и южным склонением. В северном полушарии Земли они могут восходить в утренние сумерки и уже не быть видимыми. Сложнее всего на рассвете наблюдать шаровое скопление M30 в созвездии Козерога, именно им и определяется возможность совершить полный "марафон Мессье" в северных широтах. Нам нужно определить широту φ, на которой в момент восхода скопления Солнце окажется на глубине h=12° под горизонтом.

Можно решить задачу аналитическим способом. По карте определяем координаты скопления M30: α=21ч40м, δ=$-23°$. Разница прямых восхождений Солнца и скопления есть 2ч20м или 35°. Скопление находится не очень далеко от Солнца, и можно рассматривать часть небесной сферы как плоскость.


Объекты каталога Мессье
Рассеянное скопление
Шаровое скопление
Скопление в туманности
Планетарная туманность
Газовая туманность
Остаток вспышки сверхновой
Темная туманность
Галактика
24ч
21ч
18ч
15ч
12ч
9ч
6ч
3ч
0ч
+60°
+30°
0°
-30°
-60°



Угол между небесным экватором и направлением от Солнца к скоплению равен

$$\gamma = \arctan\frac{|\delta|}{\Delta\alpha} = 33^\circ. \tag{1}$$

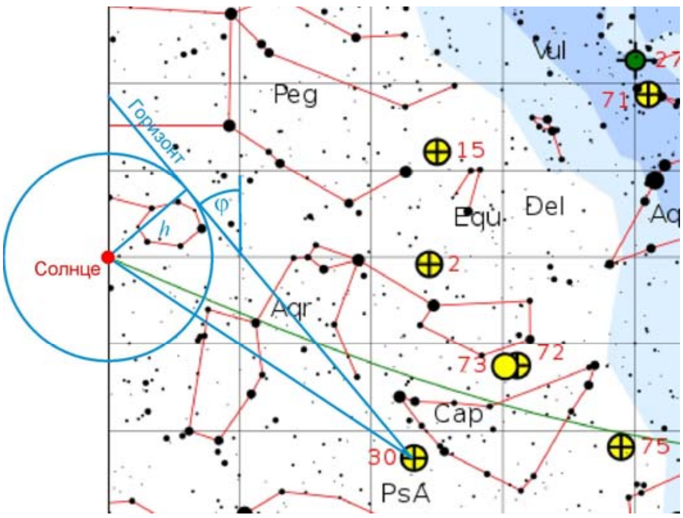
Угловое расстояние между скоплением и Солнцем есть

$$d = \sqrt{\Delta\alpha^2 + \delta^2} = 42^\circ. \tag{2}$$

Отсюда мы получаем широту места как угол между экватором и направлением на зенит:

$$\varphi = \arccos\frac{h}{d} - \gamma = 40^\circ. \tag{3}$$

Учитывая практический характер задачи и неточность определения координат скопления по карте, задачу можно решить и графически. Для этого пометим на карте положение Солнца, нарисуем окружность радиусом h и центром в Солнце. Это несложно сделать, так как на карте проведены координатные линии:



Горизонт в этом случае есть линия, касающаяся этой окружности. Нас интересует случай, когда горизонт проходит через скопление М30. Построив данную линию, мы можем найти широту как угол между ней и вертикальной линией карты (направлением на полюс). При аккуратных построениях мы получаем то же значение широты $\varphi = +40°$.

В действительности, наблюдать шаровое скопление у горизонта во время навигационных сумерек весьма затруднительно, поэтому считается, что полный "марафон Мессье" можно совершить южнее широты +35°.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 4 балла:</u> формулировка предельного условия для широты, при котором "марафон Мессье" может быть совершен полностью. Правильный ответ может быть связан только с шаровым скоплением M30.

Возможная ошибка участника: поиск предельной широты, исходя из координат самого южного объекта каталога Мессье, и запись ответа $\varphi=+55°$ с возможной погрешностью в несколько градусов. Если этот вывод формулируется как частное условие с дальнейшим продолжением решения, то оценка определяется правильностью этого решения. Если же данный ответ считается окончательным, оценка за всю задачу не превосходит 2 баллов и снижается в случае ошибок в поиске южного объекта и вычислении широты.

Возможная ошибка участника: указание иного объекта, определяющего верхнюю границу широтного интервала. В этом случае этап оценивается в 2 балла, последующие оцениваются в том случае, если методика оценки широты соответствует описанным выше, но для иного объекта.

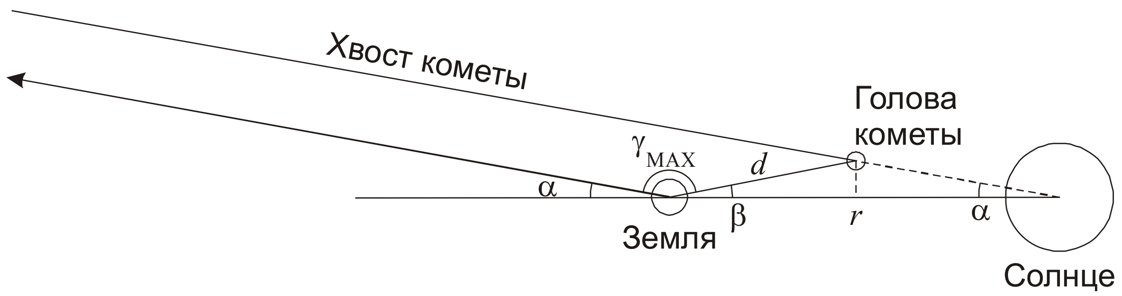
<u>2 этап – 6 баллов:</u> определение широты. Численный и графический способ являются одинаково верными и оцениваются полностью. При условии правильного метода требуемая точность определения широты – 4°, далее оценка снижается на 1 балл за каждые 2° дополнительной погрешности (при этом, очевидно, оценка за этап не может быть меньше 0 баллов). Участники могут не пользоваться плоским приближением и идти методом сферической тригонометрии, что значительно усложняет выкладки. Данный способ засчитывается, если произведен правильно и дает правильный ответ (38°) с требуемой точностью.

При использовании качественно неверной методики определения широты или неверного задания условия для ее поиска, вне зависимости от ответа, этап не засчитывается.

10.1. ВО ВСЕ НЕБО

Условие. В небе Земли появилась яркая комета с тонким прямым газовым хвостом длиной в 120°. Ее ядро располагалось на небе в 30° от Солнца. Определите максимальное возможное пространственное расстояние от Земли до ядра кометы. Орбиту Земли считать круговой, а хвост кометы – направленным в пространстве точно от Солнца.

Решение. Прямой газовый хвост кометы направлен на небе в сторону, противоположную Солнцу.



Пусть γ – длина хвоста кометы в небе Земли, β – угловое расстояние между ядром кометы и Солнцем. Обозначим гелиоцентрический угол между направлениями на Землю и комету как α. Тогда, каким бы длинным не был хвост, на небе Земли он не может зайти дальше направления, показанного на рисунке стрелкой. Для его видимой длины в небе Земли справедливо неравенство:

$$\gamma \le \gamma_{MAX} = 180° - \alpha - \beta. \qquad (1)$$

Величины углов β и γ нам известны, они равны 30° и 120° соответственно. Отсюда мы имеем:

$$\alpha \le 180° - \gamma - \beta = 30°. \qquad (2)$$

Обозначим радиус земной орбиты как r. Из рисунка мы видим, что расстояние от Земли до ядра кометы d при фиксированном угле β будет тем большим, чем больше угол α. Искомое максимальное расстояние будет достигнуто, когда угол а составит ровно 30°. Тогда из теоремы синусов в треугольнике "Земля-ядро кометы-Солнце" мы получаем выражение для расстояния до ядра кометы:

$$d \le r\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \le r\frac{1}{2\cos\beta} = 0.58\ a.e. \qquad (3)$$

Последнее неравенство получено с учетом того, что $\alpha \le \beta$. Его можно получить и напрямую, учитывая, что в случае максимального угла α треугольник "Земля-ядро кометы-Солнце" оказывается равнобедренным.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 6 баллов:</u> формирование условия на угол α, который может быть определен как гелиоцентрический угол между направлением на Землю и комету, так и как геоцентрический угол между направлением на конец хвоста кометы и противосолнечную точку неба.

2 этап – 4 балла: определение максимального расстояния от Земли до ядра кометы. Этап может быть выполнен как решением равнобедренного треугольника, так и более общим решением теоремы синусов в общем виде для углов α (в Солнце) и $\alpha+\beta$ (в комете). Требуемая точность ответа – 0.02 а.е (ответ 0.6 а.е. может быть засчитан). При ошибках до 0.05 а.е. оценка снижается на 2 балла, при ошибках до 0.1 а.е. – на 3 балла.

Комментарий: два этапа в решении участника могут быть нераздельными, если он формулирует условие на расстояние d, минуя запись неравенства для угла α в явном виде. Такие решения оцениваются в полной мере.

10.2. ГЛАЗ ЗОМБИ

Условие. На Земле появился человек с исключительно острым зрением. Чтобы заметить звезду на небе, ему достаточно зафиксировать каждым глазом в среднем по одному фотону от звезды за такт фиксации изображения (0.04 секунды). Диаметр зрачка глаза при этом равен 8 мм, спектральные свойства зрения такие же, как у обычного человека. Какой будет проницающая способность зрения такого человека в звездных величинах? Условия для наблюдений идеальные, атмосферные эффекты не учитывать.

Решение. Пусть λ – длина волны наилучшей видимости человеческого зрения, которую будем считать равной 5500 ангстрем. Энергия кванта с такой длиной волны есть

$$E = h\nu = hc/\lambda = 3.6\cdot 10^{-19} \text{ Дж}. \quad (1)$$

Определим плотность потока энергии от звезды, при котором в зрачок заданного диаметра d за заданное время t будет попадать такая энергия:

$$J = \frac{4E}{\pi d^2 t} = \frac{4hc}{\pi d^2 \lambda t} = 1.8\cdot 10^{-13} \text{ Вт/м}^2. \quad (2)$$

Нужно отметить, что эта величина характеризует не полное количество энергии, идущее от звезды, а только энергию в оптическом диапазоне спектра, других фотонов глаз не замечает. Поэтому при пересчете в звездные величины на основе сравнения с известным источником необходимо оперировать с плотностью потока энергии в видимом диапазоне. Для Солнца это величина J_0=600 Вт/м^2. Зная визуальную звездную величину Солнца m_0, находим проницающую способность "глаза Зомби":

$$m = m_0 - 2.5\lg(J / J_0) = 12. \quad (3)$$

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 3 балла:</u> определение энергии одного кванта в видимой области спектра. Этап может выполняться численно или включаться в аналитическом виде в последующие формулы. Участник олимпиады может взять несколько иное значение длины волны, засчитывается любое значение от 3500 до 7000 А, что дает эффект не более 0.5^m в итоговом ответе без влияния на оценку. При появлении лишних численных коэффициентов (2π, $1/2\pi$ и т.д.) и при арифметической ошибке в 2 раза и более оценка снижается на 1 балл, при ошибке в 4 раза и более оценка уменьшается на 2 балла без влияния на последующие этапы.

<u>2 этап – 3 балла:</u> определение плотности потока энергии от предельно заметной звезды. При ошибке в формуле (в частности, если диаметр зрачка путается с его радиусом) оценка уменьшается на 2 балла без влияния на последующие этапы. Аналогично предыдущему этапу, при арифметической ошибке в 2 раза и более оценка снижается на 1 балл, при ошибке на порядок и более оценка уменьшается на 2 балла без влияния на последующие этапы.

<u>3 этап – 4 балла:</u> определение предельной звездной величины. Требуемая точность – 1^m без учета ошибок на предыдущих этапах. Если в качестве источника сравнения берется Солнце с болометрической величиной плотности потока энергии – это увеличивает проницающую способность примерно на 1^m (до 13^m при верных расчетах), это считается физической ошибкой, оценка уменьшается на 2 балла.

10.3. МАГЕЛЛАНОВ МОНСТР

Условие. Звезда R136a1 в рассеянном звездном скоплении R136 в Большом Магеллановом облаке является самой массивной из известных в настоящее время звезд, ее масса оценивается в 315 масс Солнца. Абсолютная болометрическая звездная величина этой звезды равна -12.62^m. Звезда является источником сильнейшего звездного ветра с темпом в $5.1 \cdot 10^{-5}$ масс Солнца в год. Как и во сколько раз эта звезда быстрее теряет водород – в виде звездного ветра или в термоядерных реакциях синтеза гелия, которые являются основным источником излучаемой энергии? Считать, что химический состав звезды и ее ветра аналогичен солнечному, ядро гелия-4 на 0.7% легче четырех протонов.

Решение. Сравнивая абсолютные болометрические звездные величины R136a1 и Солнца, мы находим величину светимости R136a1:

$$L = L_0 \cdot 10^{-0.4(m-m_0)} = 8.6 \cdot 10^6 \cdot L_0 = 3.3 \cdot 10^{33} \text{ Вт.} \qquad (1)$$

Здесь L_0 – светимость Солнца, m и m_0 – абсолютные звездные величины R136a1 и Солнца. Такое энерговыделение обеспечивается потерей массы в единицу времени L/c^2. Учитывая, что в ходе синтеза гелия теряется часть массы водорода $\eta = 0.007$, определим, сколько водорода должна сжигать за секунду звезда, чтобы обеспечить такое энерговыделение:

$$\dot{M}_T = \frac{L}{\eta c^2} = 5.2 \cdot 10^{18} \text{ кг/с.} \qquad (2)$$

Учитывая, что масса Солнца составляет $2.0 \cdot 10^{30}$ кг, а в годе около $3.16 \cdot 10^7$ секунд, мы получаем, что потеря водорода в термоядерных реакциях в недрах R136a1 составляет $8.2 \cdot 10^{-5}$ масс Солнца в год.

По условию задачи, химический состав звездного ветра R136a1 мы считаем солнечным, то есть содержащим около 70% водорода. Тогда потеря водорода в звездном ветре есть $3.6 \cdot 10^{-5}$ масс Солнца в год. В итоге мы получаем, что два механизма потери водорода звездой имеют сравнимый порядок величины, преобладает потеря в термоядерных реакциях. Отношение темпа процессов есть

$$\frac{\dot{M}_T}{\dot{M}_W} \approx 2.3. \qquad (3)$$

Это отношение отражается тем фактом, что к концу термоядерного горения водорода, который наступит у R136a1 в течение всего лишь двух миллионов лет, эта звезда потеряет чуть больше трети своей массы.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>Этап 1 – 3 балла:</u> определение светимости звезды R136a1, исходя из ее абсолютной звездной величины. Этап может быть выполнен численно или аналитически. Так как в условии задана абсолютная болометрическая величина звезды, а в справочных данных – абсолютная болометрическая величина Солнца, то при использовании Солнца как объекта сравнения этап выполняется прямым использованием формулы Погсона без привлечения каких-либо численных коэффициентов, несмотря на очевидную разность эффективных температур звезд.

Требуемая точность вычислений – 10%, так как звездные величины известны достаточно хорошо. Если этап выполняется численно, то при арифметических ошибках до 20% оценка уменьшается на 1 балл, до 30% - на 2 балла, при больших арифметических или физических ошибках этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере.

Этап 2 – 4 балла: определение темпа потери водорода в звезде R136a1 за счет термоядерных реакций. Величина может выражаться в кг/с, массах Солнца в год, а также быть записана в аналитическом виде для численной подстановки на заключительном этапе решения. При численном решении требование по точности – 10% без учета ошибок на предыдущем этапе, при ошибках до 20% оценка уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка участника: опускание фактора η в формуле (2), что увеличивает темп сгорания водорода в 150 раз. Это считается грубой физической ошибкой, весь этап не засчитывается, последующие, при условии правильного выполнения, оцениваются в полной мере.

Этап 3 – 2 балла: определение темпа потери водорода в звезде R136a1 за счет звездного ветра. Величина может вычисляться в массах Солнца в год (и тогда этап сводится к одной элементарной операции), кг/с, а также быть записана в аналитическом виде для численной подстановки на заключительном этапе решения. При численном решении и переводе в другие единицы требование по точности – 15% без учета ошибок на предыдущем этапе, при ошибках до 30% оценка уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка участника: опускание фактора 0.7, связанного с долей водорода в звездном ветре, и переоценка потерь водорода примерно на 40%. В этом случае оценка уменьшается на 2 балла без влияния на последующие этапы. Несколько отличная величина вклада водорода (от 0.6 до 0.8), соответствующая указанной выше допустимой погрешности, не является основанием для изменения оценки.

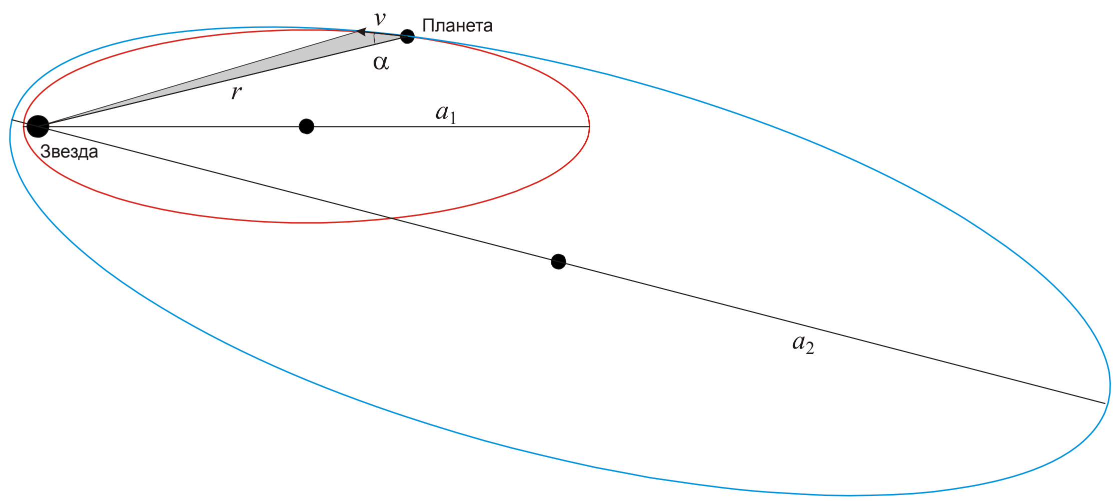
Этап 4 – 1 балл: формулировка окончательного ответа. Ввиду близости величины обоих факторов само указание, какой из них больше, на оценку не влияет, оценка определяется только количественным соотношением. В случае численного выполнения предыдущих этапов последний этап сводится к вычислению отношения уже найденных численных величин, и должен производиться с точностью не хуже 10% (без учета сделанных ранее ошибок), в противном случае он не засчитывается.

В случае аналитического выполнения предыдущих этапов последний этап заключается к записи итоговой формулы и подстановки в нее всех численных данных. В случае неточного ответа оценка изменяется в зависимости от того, где была допущена ошибка. Если она связана с выполнением предыдущих этапов (неточные формулы), снижается оценка за соответствующие этапы согласно написанному выше. При ошибке в финальном численном расчете предыдущие этапы оцениваются полностью, последний не засчитывается при погрешности более 10%.

10.4. ЭПОХА МЕНЯЕТСЯ, ПЛАНЕТА ОСТАЕТСЯ

Условие. Планета обращается по эллиптической орбите с большой полуосью a_1 и эксцентриситетом e вокруг звезды – красного гиганта. В один момент звезда быстро сбрасывает оболочку, уносящую ровно половину массы гиганта. Тем не менее, эксцентриситет орбиты планеты остался без изменений. Считая процесс сброса оболочки и ее ухода из системы мгновенным, определите расстояние от планеты до звезды r в этот момент и новую большую полуось орбиты a_2. Обе величины выразить как функции эксцентриситета e. При каких эксцентриситетах орбиты такое вообще возможно? Взаимодействие оболочки с планетой с момента сброса не учитывать, планета несравнимо меньше звезды по массе.

Решение. Хорошо известно, что при мгновенной потере половины массы центральным телом его спутник с круговой орбиты перейдет на параболическую и покинет систему, связанную с центральным телом. Однако, если орбита эллиптическая, а спутник в этот момент находится на расстоянии больше среднего, то он останется в системе. В задаче необходимо рассмотреть условие, при котором эксцентриситеты старой и новой орбит одинаковы и равны e.



Сброс оболочки звезды произошел, когда планета располагалась на расстоянии r от нее. Момент импульса единицы массы планеты (или удвоенная площадь заштрихованного треугольника, который описывает радиус-вектор планеты за единичное время) есть

$$L = v \cdot r \cdot \sin\alpha, \tag{1}$$

где α – угол между радиус-вектором и скоростью планеты. В соответствии со II законом Кеплера (или с законом сохранения момента импульса) эта величина не меняется в ходе движения планеты. Мы можем определить ее для перицентра, когда значения скорости и радиуса нам известны, а угол между их векторами прямой:

$$L = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \cdot a \cdot (1-e) = \sqrt{GMa \cdot (1-e^2)}. \tag{2}$$

Опуская размерный множитель GM, мы получаем квадратный корень из площади эллипса. В момент сброса оболочки характеристики движения планеты (v, r, $\sin\alpha$) и величина L не изменяется. Если по условию задачи не меняется и эксцентриситет – это означает, что произведение Ma тоже постоянно. Коль скоро масса звезды уменьшилась вдвое ($M_2=M_1/2$), мы получаем

$$a_2 = 2a_1. \tag{3}$$

Большая полуось орбиты планеты должна удвоиться. Теперь, из закона сохранения энергии мы можем получить известную формулу для скорости движения планеты на расстоянии r:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{4}$$

Коль скоро $M_2=M_1/2$, мы имеем:

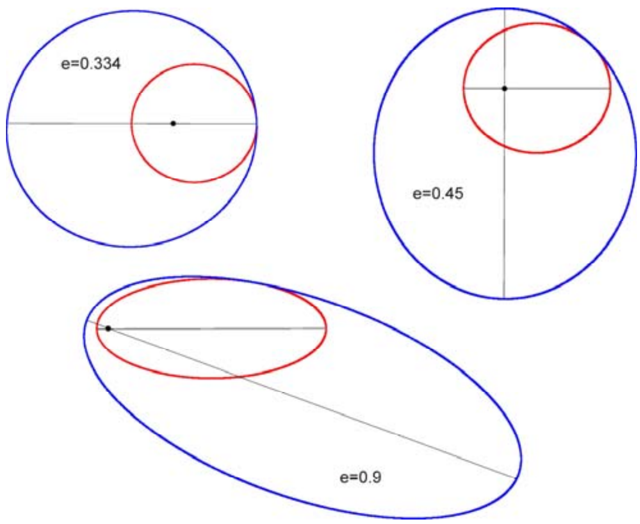
$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_2}\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{2a_2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{4a_1}. \tag{5}$$

В итоге получаем:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{4a_1}; \quad r = \frac{4a_1}{3} = \frac{2a_2}{3}. \tag{6}$$

Интересно, что итоговые соотношения (3) и (6) вообще не зависят от эксцентриситета e, предполагая только его постоянство в момент сброса оболочки. Тем не менее, описанная картина может иметь место не при любых эксцентриситетах. Для того, чтобы планета достигла расстояния $4a_1/3$ на своей первоначальной орбите, должно выполняться условие:

$$1/3 \le e < 1. \tag{7}$$



Естественно, эксцентриситет меньше единицы, так как по условию орбита эллиптическая. В граничном случае (e=1/3) сброс оболочки должен застать планету в апоцентре, который далее станет перицентром новой орбиты. При больших эксцентриситетах большая ось новой орбиты повернется по отношению к большой оси старой орбиты, причем при эксцентриситете около 0.45 угол поворота составит 90° (см. модельные рисунки).

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

1 этап – 3 балла: вывод о соотношении новой и старой большой полуоси. Оптимальный, но не единственный способ – прямой анализ закона сохранения момента импульса или второй закон Кеплера. Этап оценивается полностью, если используемая методика универсальна и не зависит от эксцентриситета. Если участник ограничивается случаем апоцентра первоначальной орбиты (e=1/3) без корректного распространения на другие случаи, этап в случае правильного ответа оценивается в 1 балл. В случае неверного соотношения, не эквивалентного $a_2=2a_1$, этап не засчитывается. Если соотношение записано как функция эксцентриситета e и соответствует правильному только при некоторых фиксированных значениях e между 1/3 и 1 (например, при том же e=1/3), за этап выставляется 1 балл.

2 этап – 4 балла: вывод о расстоянии планеты от звезды r в момент изменения ее массы. При этом используются законы сохранения импульса и энергии, соответствующие формулы (2) и (4) могут выводиться, а могут браться как известные. Аналогично предыдущему этапу, полная оценка ставится только в случае правильного вывода $r=4a_1/3$ вне зависимости от эксцентриситета, что должно быть четко показано. Если участник ограничивается случаем апоцентра первоначальной орбиты (e=1/3) без корректного распространения на другие случаи, этап в случае правильного ответа оценивается в 1 балл. В случае неверного соотношения, не эквивалентного $r=4a_1/3$ или $r=2a_2/3$, этап не засчитывается. Если соотношение записано как функция эксцентриситета e и соответствует правильному только при некоторых фиксированных значениях e между 1/3 и 1 (например, при том же e=1/3), за этап выставляется 1 балл.

3 этап – 3 балла: указание возможных значений эксцентриситета. Указание верхней границы (e<1) не является обязательным, так как оно фактически записано в условии. Появление меньшей верхней границы, вне зависимости от причин, автоматически уменьшают оценку на 1 балл. Ошибки, сделанные на предыдущих этапах, приводящие к неверному минимальному значению эксцентриситета, уменьшают оценку за этот этап еще на 1 балл, если только ответ не получается заведомо абсурдным (невозможность ситуации или, наоборот, ее возможность для любых эксцентриситетах, тогда этап не засчитывается). Если значение эксцентриситета 1/3 указывается как единственное, оценка за этап составляет 1 балл.

Возможное неполное решение участника: зная только формулы для скорости тела в перицентре и апоцентре, участник может решить задачу для частного случая апоцентра изначальной орбиты, получив значение e=1/3 и верные ответы для a_2 и r только для этого случая. Сам по себе этот вывод дает только по 1 баллу за каждый из этапов решения (сумма – 3 балла).

Далее участник может представлять, что описанный им случай является пограничным, картина заведомо не выполняется для меньших эксцентриситетов (круговые орбиты становятся параболическими, слабо вытянутые – сильно вытянутыми), но выполняются для больших эксцентриситетов. Это можно объяснить логически – представить планету на вытянутой орбите. Тогда сброс оболочки вблизи перицентра сделает орбиту гиперболической, то есть увеличит эксцентриситет, а вблизи апоцентра – наоборот, уменьшит эксцентриситет. Поэтому на орбите обязательно должна быть точка, в которой эксцентриситет останется прежним. Эти рассуждения при наличии правильного вывода $e \geq 1/3$ могут быть основанием для полной оценки в 3 балла за третий этап с суммой 1+1+3=5 баллов. Если же эксцентриситет 1/3 указывается как единственно возможный, за 3 этап выставляется 1 балл, сумма за все решение не превышает 1+1+1=3 баллов.

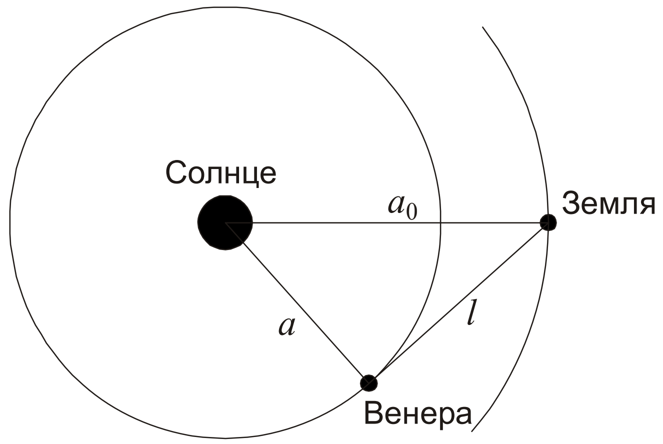
Дальнейшее увеличение оценки возможно только при указании, что значения r и a_2 не изменятся для других значений эксцентриситета e>1/3 и зависят от степени обоснованности этих выводов.

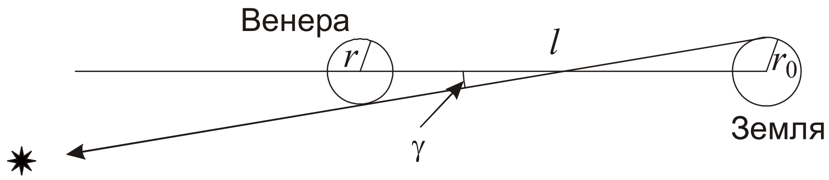
10.5. ПЛАНЕТА ПЕРЕД СКОПЛЕНИЕМ

Условие. В первые дни апреля 2020 года планета Венера прошла по звездному скоплению Плеяды. Оцените звездную величину самых ярких звезд скопления, покрытия которых Венерой произошли на Земле. Считать орбиты Венеры и Земли круговыми, и что в это время Венера находилась в наибольшей восточной элонгации, проходя на небе через центр скопления. Считать Плеяды в небе Земли кругом с угловым диаметром 1.5°, принять, что его звезды распределены на небе внутри этого круга однородно. Считать также, что количество звезд скопления, имеющих светимость более J, пропорционально $J^{-1/2}$.

Решение. Определим вначале расстояние между Венерой и Землей. Это несложно сделать, приняв, что Венера находится в наибольшей восточной элонгации при круговых орбитах:

$$l = \sqrt{a_0^2 - a^2} = 0.69\ \textit{а.е.} \approx 105\ \textit{млн км}. \qquad (1)$$

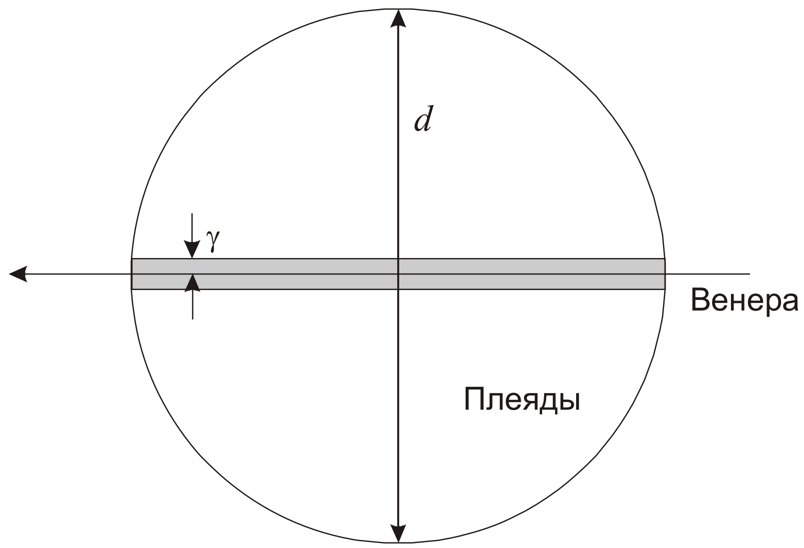




Здесь a и a_0 – радиусы орбит Венеры и Земли. Определим теперь максимальный угол между направлением на звезду и линией, соединяющий центры Земли и Венеры, при котором возможно наступление покрытия хотя бы где-нибудь на Земле:

$$\gamma = \frac{r + r_0}{l} = 1.2 \cdot 10^{-4}\ \text{рад} = 24.8''. \qquad (2)$$

Обратим внимание, что этот угол примерно вдвое больше видимого радиуса Венеры. В итоге, область Плеяд, в которой звезды могут быть покрыты Венерой, образуют прямоугольник со сторонами d (угловой диаметр скопления) и 2γ.



Определим, какую часть видимой площади Плеяд занимает этот прямоугольник:

$$k = \frac{2d\gamma}{\pi d^2/4} = \frac{8\gamma}{\pi d} \approx 0.012 \approx \frac{1}{85}. \qquad (3)$$

Таким образом, если в Плеядах есть N=85 звезд ярче звездной величины m, то можно ожидать, что какая-то из них будет покрыта Венерой. Нам нужно определить эту самую величину m. Учтем, что в Плеядах есть $N_0 \approx 10$ звезд, видимых невооруженным глазом, то есть звезд ярче звездной величины m_0=6. Тогда количество звезд ярче величины m будет равно

$$N = N_0 \left(\frac{J(m)}{J(m_0)} \right)^{-1/2} = N_0 (10^{-0.4(m-m_0)})^{-1/2} = N_0 \cdot 10^{0.2(m-m_0)}. \qquad (4)$$

Отсюда мы оцениваем звездную величину самой яркой покрываемой Венерой звезды:

$$m = m_0 + 5\lg(N/N_0) \approx 10.5. \qquad (5)$$

Наша приближенная оценка оказывается близка к действительности. Вечером 3 апреля 2020 года, около 20 часов по московскому времени Венера покрыла звезду GSC 1800:1620 с блеском 9.7^m. Произошло также несколько покрытий звезд с блеском чуть слабее 10^m.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 1 балл:</u> определение расстояния между Землей и Венерой в восточной элонгации. Выставляется только при правильном методе (формуле) и точности не хуже 0.02 а.е.

<u>2 этап – 4 балла:</u> вычисление ширины полосы на небе, в которую должны попасть звезды скопления Плеяды, чтобы произошло покрытие. Требуемая точность – 5%, при арифметической ошибке до 10% оценка уменьшается на 1 балл, при ошибке до 20% оценка уменьшается на 2 балла.

Вероятная ошибка при решении: размер полосы считается равным видимому диаметру Венеры, что уменьшает ее примерно в 2 раза. В случае этой физической ошибки оценка за второй этап составляет 1 балл только в случае отсутствия иных ошибок, иначе этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере.

Вероятная ошибка при решении: опускание фактора 2 при расчете ширины полосы (угловой диаметр Венеры путается с радиусом). Аналогично, оценка за второй этап составляет 1 балл только в случае отсутствия иных ошибок, иначе этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере. Если обе указанные ошибки накладываются друг на друга (эффект порядка 4 раз) – этап не засчитывается.

3 этап – 3 балла: вычисление доли площади Плеяд на небе, которая может быть покрыта Венерой. Требуемая точность (без учета ошибок на предыдущих этапах) – 10%. При ошибках до 20% оценка уменьшается на 1 балл, далее – на 2 балла.

Вероятная ошибка при решении участника: путаница радиуса и диаметра скопления с итоговой ошибкой в 2 или 4 раза. Максимальная оценка за этап составляет 1 балл.

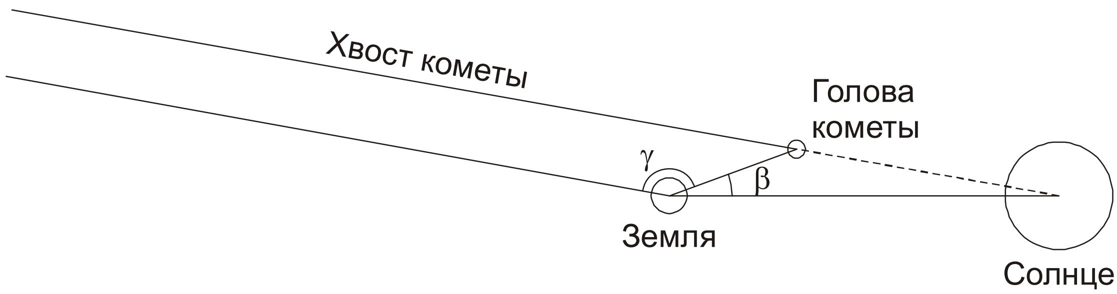
4 этап – 2 балла: вычисление звездной величины покрываемой звезды. Требуемая точность – 1.5^m, при округлении до целых ответы 10^m и 11^m засчитываются как правильные, если не сделано ошибок на предыдущих этапах. Участник может указать, что из N звезд ярче найденной величины m некоторые могут оказаться ярче, а половина из них – в 4 раза или на 1.5^m более яркими, чем найденная граница. Хотя данные рассуждения не являются абсолютно корректными с точки зрения теории вероятности, они оцениваются полностью, и ответы $9\text{-}10^m$, полученные таким образом, засчитываются.

Вероятный ход решения: участник может по-другому "калибровать" количество известных ему ярких звезд в Плеядах: например, считать, что там 6 звезд ярче 6^m (с итоговым ответом при правильных вычислениях 11.7^m, оценивается полностью) или что там 1 звезда ярче 3^m (с итоговым ответом 12.6^m, снижение на 1 балл, так как статистические оценки нельзя делать на базе одной звезды).

11.1. ВИФЛЕЕМСКАЯ КОМЕТА

Условие. Перед Новым годом (по григорианскому календарю) на небе появилась яркая комета с тонким прямым газовым хвостом длиной в 120°. В некотором пункте Земли комета (голова и хвост) хорошо видна целиком, причем в течение всей ночи (при погружении Солнца под горизонт более 12°). Определите возможные значения широты этого пункта. Рефракцией и поглощением света в атмосфере пренебречь. Считать, что газовый хвост кометы направлен в пространстве точно от Солнца, а угловые размеры головы кометы малы.

Решение. Прямой газовый хвост кометы направлен на небе в сторону, противоположную Солнцу. Можно также сказать, что на небе хвост направлен в сторону противосолнечной точки. Но, как бы не были расположены друг относительно друга Солнце, Земля и комета, прямой тонкий хвост не может пройти за противосолнечную точку (мы не рассматриваем экзотический случай Земли внутри хвоста кометы, так как голова кометы не была бы видна в этом случае ночью).



Из рисунка мы видим, что каким длинным не был бы хвост, его угловой размер в небе земли γ не может быть больше $180°-\beta$, где β – угловое расстояние ядра кометы от Солнца. Угловая длина хвоста приближается к этому максимуму, если комета располагается рядом с Землей. Коль скоро длина хвоста достигла 120°, можно сделать вывод, что голова кометы располагалась на небе не далее 60° от Солнца.

Тонкий газовый хвост будет виден в небе как дуга большого круга небесной сферы, содержащая голову кометы и противосолнечную точку (а значит, и само Солнце). Очевидно, что в течение всей ночи, когда Солнце располагается под горизонтом, противосолнечная точка находится выше горизонта. Поэтому для того, чтобы вся комета была видна, нам достаточно потребовать, чтобы над горизонтом находилось ее ядро, так как дуга большого круга длиной менее 180° будет целиком над горизонтом, если выше горизонта располагаются оба ее конца.

Коль скоро комета наблюдалась в течение всей ночи, вне навигационных сумерек, можно сделать два вывода: во-первых, сама ночь наступила, то есть Солнце опустилось под горизонт хотя бы на 12°, а во-вторых, Солнце в течение ночи не опустилось глубже 60° под горизонт, иначе голова кометы тоже обязательно бы зашла за горизонт. Итак, нижняя кульминация Солнца наступила на высоте h, лежащей в интервале от $-60°$ до $-12°$.

В условии сказано, что комета наблюдалась перед Новым годом, то есть вскоре после зимнего солнцестояния. Будем считать, что склонение Солнца δ было равно $-23°$. Высота светила в нижней кульминации составляет

$$h = -90° + |\varphi + \delta|, \qquad (1)$$

из чего следует

$$30° < | \varphi + \delta | < 78°. \qquad (2)$$

Нам необходимо рассмотреть два случая. В первом ("южном") случае мы получаем неравенство

$$-78° < \varphi + \delta < -30°, \qquad (3)$$

из которого вытекает, что широта φ может принимать значения от $-78°-\delta=-55°$ до $-30°-\delta=-7°$. Во втором ("северном") случае мы имеем

$$30° < \varphi + \delta < 78°, \qquad (4)$$

из чего получаем, что широта попадает в интервал от $30°-\delta=+53°$ до $78°-\delta=+101°$. Значение широты ограничено величинами $\pm 90°$, поэтому северный интервал, где выполняется условие задачи, соответствует широтам от +53° до +90°.

Смысл полученных значений понятен: южнее широты −55° ночь (в указанном в условии смысле) не наступает, от широты −55° до широты −7° условие задачи может выполняться. Далее следует 60-градусный интервал от −7° до +53°, где Солнце опускается в полночь очень глубоко под горизонт. Серединой этого интервала является широта +23°, на которой нижняя кульминация Солнца происходит в надире. Севернее широты +53° комета в течение долгой северной (или даже непрерывной полярной) ночи может находиться над горизонтом. Итак, ответом на задачу являются два интервала широт: от −55° до −7° и от +53° до +90°.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 4 балла:</u> вывод о максимальном возможном удалении ядра кометы от Солнца и определении величины этого удаления. Участники олимпиады должны использовать тот факт, что тонкий прямой газовый хвост кометы направлен в пространстве и на небе противоположно Солнцу. Необходимо также обосновать, что для выполнения условия задания (комета целиком над горизонтом) достаточно лишь убедиться в том, что выше горизонта располагается ее ядро. Без этого обоснования в явном виде оценка уменьшается на 1 балл.

<u>2 этап – 2 балла:</u> формулировка условия видимости кометы, причем в течение всей ночи. Должна включать в себя два факта: наступление ночи и возможность кометы находиться над горизонтом все это время. Указание каждого из условий оценивается по 1 баллу. Этап может быть оценен в случае наличия этих формулировок даже при невыполненном первом этапе.

<u>3 этап – 4 балла:</u> нахождение интервалов широт с учетом указанных двух ограничений (2 балла за фактор наступления ночи и 2 балла за фактор высоты Солнца в нижней кульминации выше −60°). В случае некорректного опускания фактора модуля или рассмотрения нижней кульминации с использованием формулы, применимой только в одном полушарии, за этап выставляется не более 2 баллов, по 1 за учет каждого фактора.

Ошибки, сделанные на первом этапе решения, не влияют на оценку за последующие этапы, если эта ошибка не лишает указанные действия смысла. Включение или исключение граничных значений широт в интервалы в ответе на оценку не влияет.

Примеры неполного решения задачи:

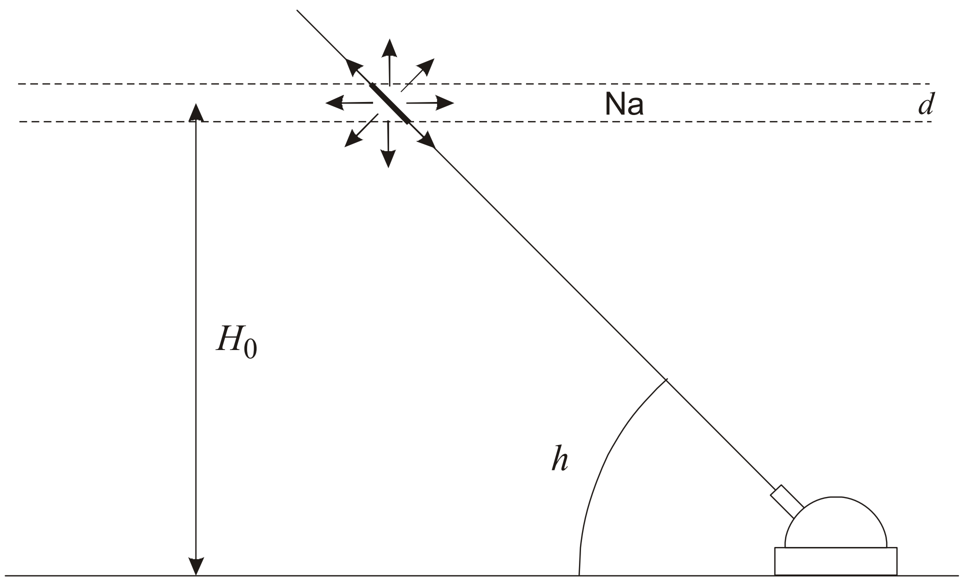
1) участник не учитывает при решении тот факт, что ночь должна наступить, и получает в ответе интервалы широт от $-90°$ до $-7°$ и от $+53°$ до $+90°$. Хотя в этом случае неверно указана только одна граница одного из интервалов, в решении полностью оценивается только первый этап в случае его выполнения, а также выставляется 1 балл за второй этап и 3 балла за третий этап. Общая оценка – не выше 7 баллов.
2) участник рассматривает оба ограничения, но использует формулу для высоты в нижней кульминации $h = -90° + (\varphi + \delta)$ без знака модуля. В итоге, он получает ответ $\varphi > 53°$, теряя интервал широт в южном полушарии. Третий этап оценивается не более 2 баллов, общая оценка – не выше 7 баллов, при условии точного выполнения первых двух этапов. Если при этом делается некорректный вывод о ситуации в южном полушарии (например, прямая аналогия $\varphi < -53°$), оценка уменьшается на 2 балла.
3) участник записывает только условие наступления ночи как единственное для наблюдения кометы, получая в итоге ограничение на широту $\varphi > -55°$. В этом случае первый этап не засчитывается полностью, за второй этап выставляется 1 балл, за третий этап – 2 балла. Максимальная оценка составляет 3 балла.

Пример альтернативного правильного решения: участник в явном или неявном виде предполагает, что комета находится точно к северу или точно к югу на небе от Солнца. Тогда, выполнив первый этап решения и предположив, что элонгация ядра кометы максимальна (60°), он может записать значения склонения ядра кометы и окончания хвоста (+37° и +23° в первом случае и $-83°$ и +23° во втором случае). Далее записываются выражения для высот в верхней и нижней кульминации и рассмотрев все возможные случаи на момент солнечной полуночи, во время которой голова кометы окажется в нижней кульминации, а окончание хвоста – в верхней кульминации. В итоге, можно прийти к правильному ответу. Подобное решение, при условии его полноты и точности, считается правильным.

11.2. НАТРИЕВАЯ ЗВЕЗДА

Условие. Большой наземный телескоп нового поколения оснащен лазером, работающим в спектральной линии натрия с длиной волны 5890 ангстрем. Освещая слой натрия в атмосфере Земли на высоте 100 км, лазер создает "искусственную звезду". Ее свет анализируется системой адаптивной оптики телескопа для исправления атмосферных искажений над местом наблюдений. Определите, какая мощность узконаправленного лазерного луча необходима для создания в небе на высоте 45° над горизонтом искусственной звезды с визуальной звездной величиной 6^m. Вертикальную оптическую толщину слоя натрия в атмосфере Земли в спектральной линии считать равной 0.010, излучение атомов натрия изотропно. Поглощением и рассеянием света в более низких слоях атмосферы пренебречь (в реальности проблема рассеяния в нижних слоях решается небольшим смещением лазера относительно телескопа).

Решение. Слой натрия располагается достаточно высоко в атмосфере, но эта высота существенно меньше радиуса Земли. Луч лазера образует угол h=45° с горизонтом, и мы вполне можем рассматривать атмосферу как плоско-параллельную, считая, что луч пересекает слой натрия под тем же углом 45°. В реальности, учет сферичности Земли изменит этот угол всего на 1°.



Пусть d – толщина слоя натрия (она составляет несколько километров). За счет наклона луча лазера он пройдет сквозь этот слой путь $d/\sin h$. Таким же образом увеличится оптическая толщина слоя натрия для луча лазера по сравнению с вертикальной оптической толщиной τ_0:

$$\tau = \tau_0/\sin h = 0.014. \qquad (1)$$

Пусть J_0 – искомая мощность лазера. Его луч узкий и целиком пройдет через площадку, соответствующую изображению "искусственной звезды" на небе. Мощность излучения, задержанного слоем натрия, составит:

$$J = J_0\,(1 - e^{-\tau}) \approx J_0\tau = J_0\tau_0/\sin h. \qquad (2)$$

Эта величина есть фактически светимость "натриевой звезды". Мы наблюдаем эту звезду с расстояния $H = H_0/\sin h = 141$ км, H_0 – высота слоя натрия. При учете сферичности Земли мы бы получили величину 140 км, практически неотличимую от только что найденной. Количество световой энергии, проходящее через единицу площади в единицу времени вблизи телескопа, будет равно:

$$S = \frac{J}{4\pi(H_0/\sin h)^2} = \frac{J_0\tau_0}{4\pi H_0^2}\sin h. \qquad (3)$$

Следует обратить особое внимание на первую степень множителя (sin h) в этой формуле. В случае физического источника света в атмосфере мы бы имели ($\sin^2 h$). Для определения звездной величины мы сравниваем искусственную звезду с другим источником света со звездной величиной m_0 и мощностью приходящей энергии через единичную площадь S_0:

$$m - m_0 = -2.5 \lg (S/S_0). \qquad (4)$$

В качестве объекта сравнения логично выбрать Солнце с визуальной звездной величиной -26.8^m, количество поступающей энергии от которого на Земле известно. Но здесь необходимо обратить внимание на важный факт. Лазер и слой натрия не являются абсолютно черными телами, и целиком излучают на длине волны лазера и натрия, попадающую в видимую область спектра, определяющую визуальную звездную величину, указанную в условии. Излучение Солнца попадает в видимый диапазон лишь частично. Поэтому для корректного сравнения мы берем значение плотности потока энергии от Солнца S_0 в видимом диапазоне спектра (600 Вт/м^2). Теперь мы можем определить мощность лазера:

$$J_0 = \frac{4\pi H_0^2 S}{\tau_0 \sin h} = \frac{4\pi H_0^2 S_0}{\tau_0 \sin h}\cdot 10^{0.4(m_0 - m)} = 800 \text{ Вт}. \qquad (5)$$

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>1 этап – 3 балла.</u> Учет фактора оптической толщины, то есть того, что не вся энергия лазера будет рассеиваться слоем натрия в атмосфере. Полностью выполненным этап считается при правильном выражении светимости "натриевой звезды" в атмосфере – формула (2) или эквивалентное ей выражение.

Участник олимпиады может использовать геометрию сферической Земли при расчете угла между лучом лазера и слоем натрия. В этом случае угол меняется всего на 1°, что дает эффект в дальнейших вычислениях порядка 2%. Это не влияет на оценку в случае правильного выполнения, однако если это вызывает отклонение в 10% и более – это свидетельствует об ошибке, оценка снижается на 1 балл.

Участник олимпиады может также пытаться учесть самопоглощение излучения в слое натрия. Математически это эквивалентно сохранению общего вида формулы (2) без приближений. Однако ввиду очень малой оптической толщины слоя разница будет ничтожной: случае мы получим светимость натриевой звезды в $0.139J_0$ вместо $0.14J_0$, то есть эффект составляет менее 1%. Учет самопоглощения не влияет на оценку, если его эффект оказывается менее 3% от светимости натриевой звезды, при большем отклонении оценка снижается на 1 балл.

Вероятные ошибки при выполнении этапа:

1) Пропуск фактора sin h, то есть расчет светимости натриевой звезды в зените вместо высоты 45°. При отсутствии иных ошибок это приводит к фактору $\sin^2 h$ вместо $\sin h$ в

итоговой формуле решения и увеличению итоговой мощности лазера в 1.4 раза. В этом случае оценка за этап уменьшается на 1 балл.
2) Эффект полностью пропущен, светимость натриевой звезды считается равной мощности лазера. В этом случае этап полностью не засчитывается, остальные этапы, кроме финального, оцениваются в полной мере.

Этап 2 – 3 балла. Связь плотности потока энергии от натриевой звезды с ее светимостью. Основным моментом является обратная пропорциональность второй (а не четвертой) степени расстояния, так как луч узконаправленный и целиком попадает в исследуемую область атмосферы. При иных показателях степени этап не засчитывается.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: пропуск фактора увеличения расстояния до натриевой звезды из-за ее высоты над горизонтом в 45°. Это приводит к исчезновению фактора $\sin^2 h$ в первом равенстве формулы (3), а в ее втором равенстве $\sin h$ переходит из числителя в знаменатель. В итоге это приводит к двукратному занижению итоговой мощности лазера, оценка за этап уменьшается на 1 балл.

Участник олимпиады может допустить ошибки на первом и втором этапах, связанные с расположением натриевой звезды. Эффекты будут частично компенсироваться, из итогового выражения пропадет фактор ($\sin h$), а мощность лазера будет занижена в 1.4 раза. В этом случае сохраняется уменьшение оценки на 1 балл за первый этап и уменьшение на 1 балл за второй этап (итоговый эффект – уменьшение на 2 балла, также уменьшится оценка за последний этап решения).

При расчете расстояния до звезды участник может пользоваться моделью сферической Земли, но в этом случае расстояние уменьшается всего на 1 км и итоговый эффект в потоке энергии от источника на Земле составляет менее 2%. Это не влияет на оценку при правильном выполнении, но уменьшает ее на 1 балл, если эффект оказывается большим 15%.

Этап 3 – 2 балла. Сравнение натриевой звезды с другим источником света, применение формулы Погсона. Если в качестве источника берется Солнце с болометрической величиной плотности потока энергии – это увеличивает итоговую мощность лазера в 2.5 раза, за данный этап выставляется только 1 балл.

Этап 4 – 2 балла. Формулировка ответа. Выставляется при правильно выполненных предыдущих этапах и ответе. При ответе, отличном от правильного более, чем в полтора раза (в частности, из-за описанных выше причин), оценка за этап уменьшается до 1 балла, при отличии более чем в 3 раза – этап не засчитывается.

11.3. НАЧАЛО ДОЛГОГО ПУТИ

Условие. Протозвезда (будущая звезда, в недрах которой еще не начались термоядерные реакции) имеет массу, равную массе Солнца, солнечный химический состав и абсолютную звездную величину 0^m. Оцените, за какое время эта протозвезда сожмется до солнечных размеров. Считать, что во время сжатия протозвезда не вращается, не теряет массу и сохраняет постоянную эффективную температуру поверхности в 3500 K.

Решение. Определим начальные значения светимости и радиуса протозвезды из закона Стефана-Больцмана:

$$L_1 = L_0 10^{-0.4(m-m_0)} \approx 80L_0; \quad R_1 = R_0 (T_0/T)^2 \sqrt{L_1/L_0} \approx 25R_0. \tag{1}$$

Здесь R_0, L_0 и T_0 – радиус, светимость и температура Солнца, T – температура поверхности протозвезды. В недрах протозвезды еще не начались термоядерные реакции, и она светит за счет своего постепенного сжатия. Гравитационная энергия протозвезды равна

$$E_G = -\gamma \frac{GM^2}{R}, \tag{2}$$

где M и R – масса и текущий радиус протозвезды. Коэффициент γ близок к единице, в дальнейшем мы его опускаем. С течением времени радиус уменьшается, в соответствии с этим уменьшается и гравитационная энергия. Освобождающаяся энергия идет, во-первых, на нагрев недр протозвезды, а во-вторых, на излучение. Логично предположить (и это на самом деле близко к истине), что на обе цели энергия расходуется в равных количествах. Пусть в течение какого-то короткого интервала времени Δt радиус звезды изменился на ΔR (обратим внимание, что $\Delta R<0$). Тогда из всего вышесказанного мы можем записать:

$$-\Delta E_G = \frac{GM^2}{R+\Delta R} - \frac{GM^2}{R} = 2 \cdot 4\pi\sigma R^2 T^4 \Delta t. \tag{3}$$

Здесь σ – постоянная Стефана-Больцмана. Преобразуем это выражение, учитывая, что изменение радиуса мало по сравнению с самим радиусом:

$$-\frac{GM^2 \Delta R}{R^2} = 8\pi\sigma R^2 T^4 \Delta t. \tag{4}$$

Необходимо отметить, что с течением времени радиус и светимость протозвезды будет уменьшаться, и сжатие будет продолжаться все медленней. Последнее выражение можно переписать следующим образом:

$$-\frac{\Delta R}{R^4} = \Delta\left(\frac{1}{3R^3}\right) = \frac{8\pi\sigma T^4 \Delta t}{GM^2}. \tag{5}$$

Итак, величина $(1/R^3)$ меняется линейно со временем, то есть радиус протозвезды уменьшается пропорционально $t^{-1/3}$. В начальный момент времени радиус протозвезды равен R_1, а в конце рассматриваемого процесса он равен солнечному радиусу R_0. В итоге, мы получаем искомое значение времени:

$$\Delta t = \frac{GM^2}{8\pi\sigma T^4}\left(\frac{1}{3R_0^3} - \frac{1}{3R_1^3}\right) \approx \frac{GM^2}{24\pi\sigma R_0^3 T^4} = \frac{GM^2}{6R_0 L_0}\left(\frac{T_0}{T}\right)^4 = 4\cdot 10^7 \text{ лет.} \quad (6)$$

Обратим внимание, что это время практически не зависит от начальных условий, так как на ранних этапах сжатие протозвезды происходит значительно быстрее, чем в конце. В задаче в упрощенном виде была описана стадия Хаяши сжатия протозвезды перед началом термоядерного синтеза в ее недрах.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

1 этап – 2 балла: оценка изначального радиуса протозвезды. Если последующее решение производится правильным методом, при котором итог фактически не зависит от этого радиуса, то для полного оценивания достаточно показать, что этот радиус существенно превосходит радиус Солнца. Если участник по ходу решения обосновывает, что искомое время сжатия практически не зависит от начального радиуса протозвезды, если он существенно больше солнечного, а в этом случае это очевидно так – данного вывода достаточно для выставления 2 баллов за первый этап.

Если же последующая оценка существенно зависит от изначального радиуса или светимости протозвезды (что само по себе ошибочно и приведет к уменьшению баллов на последующих этапах), то необходимая точность оценки радиуса составляет 20%, а при двукратной ошибке в этом случае этап не засчитывается.

Вероятная ошибка участника: неверное применение закона Стефана-Больцмана, например, с учетом только фактора размера протозвезды или фактора температуры. Если при этом делается ошибка, более чем в 2 раза – этап не засчитывается полностью, при меньших ошибках за него выставляется 1 балл.

2 этап – 8 баллов: основная часть решения, определение требуемого времени. Оценка за этап определяется используемым методом.

Вероятные варианты неточных методов оценивания:

1) Расчет времени гравитационной релаксации – падения протозвезды самой на себя под действием только сил гравитации. Время равно половине периода движения по вырожденной эллиптической орбите с точкой апоцентра, соответствующей начальному радиусу протозвезды. Время составляет $t=(\pi^2 R^3/8GM)^{1/2}=2.5$ суток. Учет конечного итогового радиуса меняет ответ незначительно. Этот абсурдный ответ подход оценивается 1 баллом только в случае правильного выполнения, при любых ошибках за этап выставляется 0 баллов.

2) Приближение постоянной светимости протозвезды, равной начальному значению. Если при этом используется правильное значение гравитационной энергии, соответствующее финальному радиусу, то время получается равным $t=(GM^2/R_0L_1)=4\cdot 10^5$ лет. В этом случае оценка за этап не превышает 3 баллов. Если же в знаменатель подставляется первоначальное значение радиуса, что физически неверно, то время составляет около $1.5\cdot 10^4$ лет, оценка за этап не превышает 2 баллов. Ответ может быть уменьшен в 2 раза с учетом потерь энергии на разогрев недр, в данном варианте это не влияет на оценку.

3) Приближение постоянной светимости протозвезды, соответствующей промежуточному значению радиуса $R_M=R_1/2$. Светимость составляет $L_M=L_1/4$. Если то же значение радиуса подставляется в формулу для энергии, то мы получаем время $t=(GM^2/R_M L_M)=1.2\cdot 10^5$ лет, итоговая оценка за этап не превосходит 3 баллов. При подстановке в формулу для энергии конечного радиуса получаем $t=(GM^2/R_0 L_M)=1.5\cdot 10^6$ лет, оценка за этап не превосходит 4 баллов. Учет фактора 2 в энергии за счет разогрева недр в этом случае на оценку не влияет.

4) Приближение постоянной светимости протозвезды, соответствующей окончательному значению радиуса R_0. Светимость составляет $L_F=L_0(T/T_0)^{1/4}$. Если то же значение подставляется в формулу для энергии, то мы получаем время $t=(GM^2/R_0L_F)=2.5\cdot10^8$ лет, что в 6 раз превышает истинное значение. Максимальная оценка за этап в этом случае составляет 5 баллов, если же учтены потери энергии на разогрев недр, и время еще вдвое меньше, оценка за этап составляет 6 баллов.
5) При верном подходе, описанном выше, оценка составляет 7 баллов, если фактор 2 от потерь энергии на разогрев недр не учтен, и время оказывается вдвое большим.
6) В выражении для времени не учитывается фактор $(T/T_0)^4$, характеризующий, что протозвезда холоднее Солнца, и светимость с единицы площади у нее в 7-8 раз меньше. Это приводит к такому же уменьшению величины времени. В этом случае оценка за этап уменьшается на 3 балла, или до 0 баллов, если изначально она была менее 3 баллов.
7) При появлении иных неточных методов оценивается их обоснованность и конечный результат. Оценка соответствует такому из неточных методов, описанных выше, который, при отсутствии арифметических ошибок, дает эквивалентный по точности итог. При любом методе, если искомое время в существенной степени зависит от начального размера протозвезды, оценка за второй этап не может превышать 4 баллов.

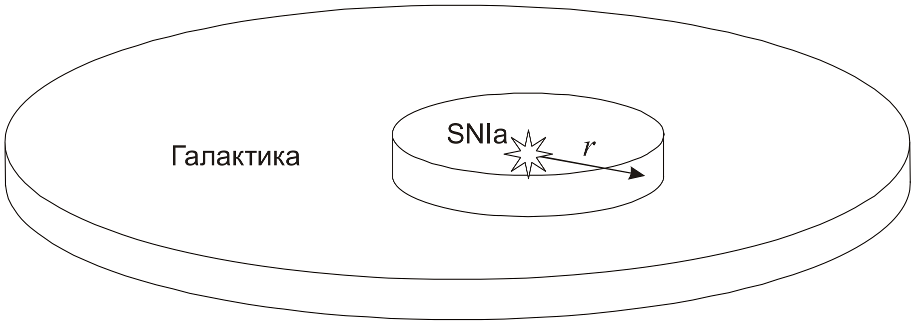
Участник может задавать коэффициент γ в выражении для энергии (формула 2), отличный от единицы. Это не влияет на оценку (хотя и изменяет ответ), если коэффициент задается от 0.6 (равномерное распределение плотности) до 1.0 (ближе к реальности для протозвезд с центральным увеличением плотности). При выходе из этого интервала оценка уменьшается на 1 балл.

11.4. ГАЛАКТИЧЕСКОЕ ШОУ

Условие. В дисковой галактике вспыхнула сверхновая звезда типа Ia. В этой галактике много звезд с обитаемыми планетными системами. На каком-то этапе после максимума сверхновая в течение отрезка времени в 100 суток ослабла ровно на 1^m, а количество жителей галактики, которые будут способны увидеть ее невооруженным глазом на текущей стадии, сократилось в полтора раза. Найдите абсолютную звездную величину сверхновой в начале и конце данного 100-дневного интервала. Галактика имеет радиус диска 20 кпк, толщину диска 300 пк, сверхновая располагается в плоскости симметрии диска неподалеку от его центра. Обитаемые планеты равномерно заполняют объем диска галактики, плотность населения также однородна и не меняется со временем. Свойства зрения жителей галактики одинаковы и идентичны людям на Земле. Диск галактики заполнен пылью, создающей эффект поглощения света ровно в 2^m на килопарсек, одинаковый во всем диске.

Решение. Мы сразу можем обратить внимание, что число потенциальных наблюдателей сверхновой за 100 суток уменьшилось не столь значительно. Действительно, для объектов с не очень большим радиусом видимости, на котором поглощение света не играет определяющей роли, ослабление источника на 1^m (в $10^{0.4}$ раз) означает уменьшение этого самого радиуса видимости в $10^{0.2} \approx 1.6$ раз. Если распределение наблюдателей однородно, то их число уменьшится в $10^{0.6} \approx 4$ раза. Мы можем предположить, что радиус видимости больше толщины диска галактики, и тогда число наблюдателей пропорционально квадрату, а не кубу радиуса видимости. Но и в этом случае ослабление источника на 1^m приведет к уменьшению числа наблюдателей в $10^{0.4} \approx 2.5$ раза. Итак, в описанной в условии картине существенную роль играет поглощение света, что естественно для столь ярких и видимых с большого расстояния источников, как сверхновые звезды.

Сверхновая располагается в плоскости симметрии диска. Мы можем указать, что радиус видимости существенно больше половины толщины диска (150 пк), так как на таком масштабе поглощение света составляет всего 0.3^m и не сказалось бы столь сильно на изменении численности наблюдателей. В дальнейшем мы сможем убедиться в правильности этого вывода. Итак, множество наблюдателей фактически образуют диск той же толщины, что и сама галактика, а их число N пропорционально r^2, где r – расстояние, с которого сверхновая будет видна на пределе возможностей человеческого зрения.



Пусть M_1 и M_2 – абсолютные звездные величины сверхновой в начале и конце 100-дневного интервала, описанного в условии задачи, а r_1 и r_2 – соответствующие предельные расстояния, с которых сверхновая может быть видна невооруженным глазом. Обозначив предельную звездную величину для невооруженного глаза как m, запишем:

$$m = M_1 - 5 + 5 \lg r_1 + E \cdot r_1,$$

$$m = M_2 - 5 + 5\lg r_2 + E\cdot r_2. \qquad (1)$$

Здесь расстояния r_1 и r_2 выражается в парсеках, а величина поглощения E равна 0.002^{m}/пк. Из условия задачи нам также известно, что

$$M_1 - M_2 = -1,$$
$$N_1/N_2 = (r_1/r_2)^2 = K = 1.5. \qquad (2)$$

Вычтем из первого выражения в (1) второе и учтем соотношения (2):

$$M_1 - M_2 + 5\lg(r_1/r_2) + E\cdot(r_1 - r_2) = -1 + 2.5\lg K + E\cdot(r_1 - r_2) = 0. \qquad (3)$$

Отсюда мы получаем разность радиусов видимости:

$$r_1 - r_2 = \frac{1 - 2.5\lg K}{E} \approx 300\ пк. \qquad (4)$$

Из формулы (4) и второго соотношения в (2) мы получаем сами расстояния: $r_1 \approx 1500$ пк, $r_2 \approx 1200$ пк. Мы видим, что это существенно больше полутолщины диска, но меньше радиуса галактики, что оправдывает упрощенную геометрию области видимости (рисунок) и второе соотношение формулы (2). Нам остается определить абсолютные звездные величины сверхновой в эти моменты:

$$M_1 = m + 5 - 5\lg r_1 - E\cdot r_1 \approx -8,$$
$$M_2 = m + 5 - 5\lg r_2 - E\cdot r_2 \approx -7. \qquad (5)$$

Здесь мы взяли предельную звездную величину для невооруженного глаза m=6.

Возвращаясь к началу решения, отметим, что если бы мы предположили, что область видимости сверхновой меньше полутолщины диска Галактики, и $K=(r_1/r_2)^3$, коэффициент в формуле (4) вместо 2.5 составлял бы 5/3, разница расстояний $r_1 - r_2$ была бы равна 350 пк, а сами расстояния – 2750 и 2400 пк. Это существенно больше толщины диска, что приводит нас к противоречию со сделанным предположением.

Система оценивания, максимум – 10 баллов.

Оценка за все решение определяется правильностью используемого метода. При выполнении, аналогичном описанному выше, решение разделяется на несколько этапов:

<u>1 этап – 4 балла</u>: обоснованный вывод, что число наблюдающих сверхновую цивилизаций пропорционально второй степени предельного расстояния до нее. Предположение должно быть не только сделано, но и проверено на основе полученных в последующих этапах предельных расстояниях видимости сверхновой. Если это предположение не делается и не обосновывается в явном виде, но фактически используется в решении, этап оценивается в 3 балла, последующие этапы оцениваются в полной мере. При указании иной связи (например, пропорциональность кубу расстояния), этап не засчитывается, остальные этапы оцениваются в полной мере (см. далее). Подробные объяснения, приведенные выше в начале решения, не являются обязательными.

<u>2 этап – 4 балла</u>: определение предельных расстояний видимости сверхновой в два момента времени в численным или формульном виде. Этап может выполняться несколько иным способом: участник может получить отношение расстояний из условия числа наблюдаемых

цивилизаций (r_1/r_2=1.25), далее указать, что при отсутствии поглощения модули расстояний отличались бы примерно на 0.4^m, следовательно, оставшиеся 0.6^m определяются поглощением, из чего получаем разность расстояний в 0.6/0.002=300 пк. Такой подход полностью эквивалентен описанному выше. Требуемая точность определения итоговых расстояний (не разницы между ними!) составляет 100 пк, при погрешности до 300 пк, вызванной только арифметическими ошибками, оценка за этап снижается на 1 балл.

Если участник считает количество цивилизаций пропорциональным кубу предельного расстояния (фактически, не выполнив предыдущий этап решения), то в формуле (4) коэффициент 2.5 меняется на 5/3, меняется и показатель степени во втором соотношении формулы (2). Величина разности расстояний оказывается равной 350 пк, сами расстояния равны 2750 и 2400 пк, что существенно больше толщины диска Галактики. В этом случае этап засчитывается полностью при условии правильных вычислений с теми же требованиями по точности, что описаны выше. Однако, при этом участник не получает баллы за предыдущий этап решения.

Вероятная ошибка при решении: коэффициент E считается равным 2^m/пк, то есть завышается в 1000 раз. В этом случае расстояние до сверхновой оказывается порядка 1 пк, а ее светимость (см. следующий этап решения) – очень слабой. Абсурдность такого ответа должна быть очевидной для участников. Если участник оперирует и далее с такими ответами, не указывая на их неестественность, второй и третий этап решения не засчитываются полностью. Если абсурдность ответа указывается, но не исправляется, второй и третий этапы засчитываются наполовину.

Вероятное дополнение к решению: участник может попытаться учесть движение звезд и планет в галактике за то время, пока свет от сверхновой достигнет их. Ввиду того, что скорость движения звезд значительно меньше скорости распространения света, это не должно сказываться на общем количестве наблюдателей сверхновой. Оценка за решение не меняется, если участник получает в итоге такой вывод или учет движения не изменяет его численный ответ. Однако, если учет движения приводит к значимому отличию ответа, оценка за этап уменьшается на 1 балл при итоговом эффекте для предельного расстояния более 10%, на 2 балла – более 30% и на 3 балла – более 50%.

<u>3 этап – 2 балла</u>: определение абсолютной звездной величины сверхновой в начале и конце 100-дневного интервала. Участник может определить по формуле (5) только одну из величин, указав, что другая отличается на единицу. Этап засчитывается, если найдена только одна из величин, при условии верного расчета и указания, какая из двух величин найдена. Требуемая точность – 1^m, при ошибке до 2^m за этап выставляется 1 балл.

При предположении $N \sim r^3$, описанном выше, абсолютные звездные величины составляют около -12^m и -11^m. Так как эти величины вполне возможны для сверхновых на определенной стадии, этап при условии точного выполнения также засчитывается с теми же требованиями по точности. В итоге, полностью правильное решение в предположении $N \sim r^3$ (фактически, предположении большой толщины диска галактики) оценивается в 6 баллов (0+4+2).

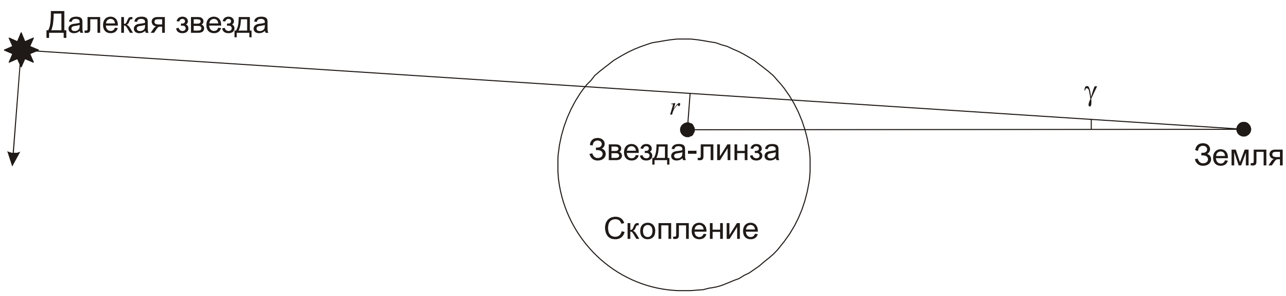
Участник может предположить иную предельную звездную величину для человеческого глаза, от 5^m до 7^m. Соответствующим образом изменится и ответ в задаче. Это не является ошибкой и на оценку не влияет.

Вероятная ошибка при решении: неверная зависимость звездной величины от расстояния при наличии поглощения (ошибки не в коэффициентах, а в самом характере зависимости). В этом случае засчитывается только первый этап решения (при условии его выполнения).

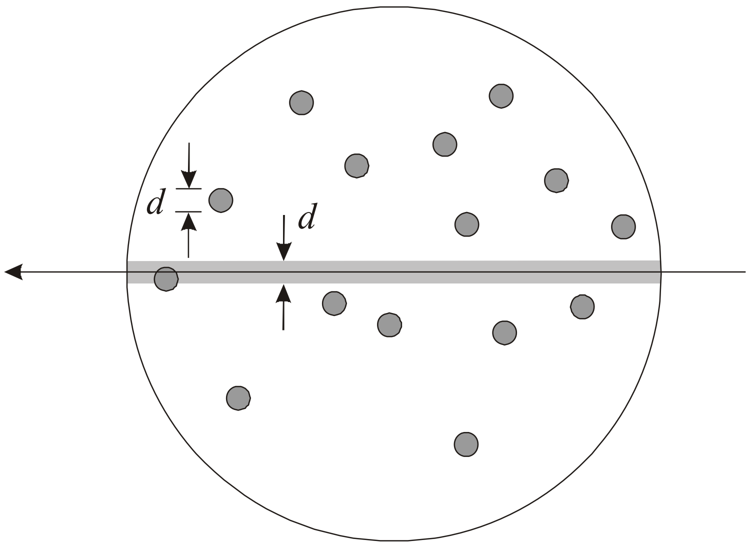
11.5. ВСПЫШКИ ЗА СКОПЛЕНИЕМ

Условие. Яркая быстрая звезда пролетает далеко позади шарового звездного скопления с массой 300 тысяч масс Солнца и диаметром 30 пк. При наблюдении в небольшой телескоп на Земле скопление имеет однородную поверхностную яркость. Видимая траектория звезды проходит за центром скопления. Во время пролета у звезды могут наблюдаться вспышки видимой яркости за счет сильного гравитационного микролинзирования на звездах скопления. Вспышка происходит, если геоцентрический угол γ между направлениями на далекую звезду-источник и звезду-линзу становится меньшим или равным $2r_G/r$ (радиан), где r – минимальное расстояние между отрезком «Земля – далекая звезда» и линзой, r_G – гравитационный радиус линзы (см. рисунок). При каком расстоянии от Земли до скопления у далекой звезды за время пролета вероятно ожидать хотя бы одну вспышку?

Считать, что скопление находится в небе Земли на эклиптике, движение далекой звезды происходит вдоль эклиптики. Собственным движением скопления и его звезд пренебречь.



Решение. Шаровое скопление состоит из N звезд со средней массой m, его суммарная масса равна $M=Nm$. Вокруг каждой из звезд на небе есть некоторая область, при попадании в которую звезды-источника произойдет его видимая вспышка за счет сильного микролинзирования. Определим угловой размер этой области.



Пусть r – пространственное расстояние между лучом и линзой, при котором может произойти вспышка. Угол, заданный в условии задачи (в реальности, это угол преломления света на этом расстоянии), составляет

$$\gamma = \frac{2r_G}{r} = \frac{4Gm}{c^2 r}. \tag{1}$$

Обозначим расстояние до скопления через L. По условию микролинзирования, угол между направлением на линзу и звезду должен сравняться с γ, то есть

$$r = L\gamma = \frac{4GmL}{c^2 r}; \quad r^2 = \frac{4GmL}{c^2}. \tag{2}$$

Обратим внимание, что для типичной звезды (возьмем к примеру Солнце) на типичном расстоянии до шарового скопления в 8 кпк величина r составляет порядка 10 а.е., что существенно больше радиуса Солнца и превышает радиус орбиты Земли. Даже если предположить, что звезда скопления маломассивна (например, с массой 0.1 массы Солнца), а скопление близкое (расстояние 3 кпк), величина r все равно составит около 2 а.е. Поэтому звезды скопления, за исключением немногочисленных гигантов, не экранируют лучи при линзировании. Диаметр видимого пятна на небе, в которое должен попасть источник, составляет

$$d = \frac{2r}{L} = \frac{4}{\text{c}}\sqrt{\frac{Gm}{L}}. \tag{3}$$

За время своего пролета звезда преодолеет на небе угловой диаметр скопления D/L, где D – его пространственный диаметр. В условии задачи сказано, что скопление имеет однородную поверхностную яркость, то есть мы можем считать, что звезды распределены равномерно по видимой площади скопления. Тогда их концентрация на единицу видимой площади есть

$$n = \frac{4NL^2}{\pi D^2}. \tag{4}$$

Чтобы произошло линзирование, звезда-линза должна оказаться на небе внутри прямоугольника с длиной (D/L) и шириной d, закрашенного серым цветом на рисунке. Так как звезда движется по небу вдоль эклиптики, а движением звезд скопления мы пренебрегаем, параллактическое смещение звезд и скопления за счет орбитального движения Земли не меняет картины. Число вспышек есть число звезд скопления, которые попадут в этот прямоугольник на небе – произведение поверхностной концентрации звезд на площадь прямоугольника:

$$N_L = \frac{nDd}{L} = \frac{4NdL}{\pi D} = \frac{16N}{\pi c D}\sqrt{GmL}. \tag{5}$$

Обратим внимание, что число N_L возрастает с расстоянием до скопления, то есть линзирование легче заметить на звездах более далеких скоплений. По условию задачи нам надо найти расстояние, при котором число N_L достигнет хотя бы единицы. Расстояние до скопления в этом случае

$$L \geq L_M = \frac{\pi^2 c^2 D^2}{256GmN^2} = \frac{\pi^2 c^2 D^2 m}{256GM^2} \approx 8\ \text{кпк} \cdot \left(\frac{m}{m_0}\right). \tag{6}$$

Здесь m_0 – масса Солнца. Интересно, что минимальное расстояние до скопления получилось порядка расстояния до центра Галактики и типичного расстояния до ее шаровых скоплений. К тому же, это расстояние умножается на фактор (m/m_0), и если учесть, что средняя масса звезд в шаровом скоплении существенно меньше массы Солнца (массивные звезды уже проэволюционировали, а их остатки – белые карлики, нейтронные звезды и черные дыры – участвуют в микролинзировании, но имеют меньшие массы), то условию задачи могут удовлетворять и более близкие скопления. Так, если предположить среднюю массу равной $0.3m_0$, мы получаем минимальное расстояние до скопления около 2.5 кпк, что практически совпадает с расстоянием до ближайшего шарового скопления в нашей Галактике, M4.

Нужно понимать, что пролет одной звезды за скоплением может занять сотни тысяч лет. Тем не менее, большое количество звезд фона и возможность одновременно следить за всем скоплением дает шансы на обнаружение событий микролинзирования. Как мы видим из решения, эти события могут быть еще более вероятными на многочисленных телах малых масс – коричневых карликах и даже планетах. Вероятность наблюдения еще возрастает при значительных собственных движениях звезд скопления, которые мы здесь не учитывали, а для близких скоплений эффект может дать и годичный параллакс, вызванный орбитальным движением Земли.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

<u>Этап 1 – 3 балла</u>: определение минимального углового или пространственного расстояния между лучом звезды и линзой, при котором происходит вспышка микролинзирования. Так как в выражение для r входит искомое расстояние до линзы, то сделать это можно в виде формулы (формула (2)). Принципиально важно, что пространственное расстояние (r) пропорционально квадратному корню из массы линзы и расстояния до нее, а угловое расстояние ($d/2$) – квадратному корню из массы линзы, деленной на расстояние до нее. При качественно иных видах зависимости этап полностью не засчитывается. Если получена качественно верная зависимость с ошибочным коэффициентом – оценка за этап уменьшается на 1 балл, при ошибке в коэффициенте более 4 раз оценка уменьшается на 2 балла, без влияния на оценки на последующих этапах.

Участник может попытаться учесть само преломление лучей в поле линзы, которое увеличивает радиус r. Сделать это в точности можно, зная расстояние до звезды-источника. Это приводит к появлению дополнительного числового коэффициента в формуле (2). Если этот коэффициент составляет от 1 до 2 – оценка за этап и за все задание не изменяется. При иных коэффициентах оценка за этап уменьшается на 1 балл, а при коэффициенте менее 1/2 или более 4 – на 2 балла, без влияния на оценки на последующих этапах.

Аналогично, участник может предположить, что звезда-источник имеет значительные угловые размеры, и это увеличивает вероятность линзирования. При этом звезда находится дальше скопления, ее расстояние и размеры неизвестны. Как и в случае преломления, появление коэффициента от 1 до 2 не изменяет оценку, при больших отклонениях система оценивания аналогична предыдущему случаю.

<u>Этап 2 – 5 баллов:</u> связь вероятного числа событий линзирования с характеристиками скопления и расстояния до него. Как и в предыдущем этапе, принципиальным моментом является правильная зависимость этого числа от характеристик скопления (M или N, m, D, L). При ошибке в характере зависимости этап не засчитывается полностью, если же эта ошибка вызвана неправильным выполнением предыдущего этапа – этап оценивается не выше 2 баллов. При неверном численном коэффициенте оценка снижается на 1 балл, если это не стало следствием численных ошибок на предыдущем этапе. При ошибках в коэффициентах более 4 раз оценка снижается на 2 балла, более 16 раз – на 3 балла.

Участник может выполнять этап, оперируя угловыми характеристиками (видимый размер скопления, видимый путь звезды на небе) и пространственными, пересчитывая их на расстояние до скопления. Оба подхода эквивалентны и оцениваются одинаково.

Этап 3 – 2 балла: формулировка условия для расстояния до скопления. Этап засчитывается только в том случае, если сделан вывод о том, что условие задания выполняется для расстояний, больших или равных некоторому L_M, и его значение находится как минимальное. При отсутствии этого вывода оба балла не выставляются.

Участник может найти расстояние, исходя из какого-то определенного значения средней массы звезды m либо записать универсальное соотношение (6). В первом случае этап оценивается полностью, если значение m берется от 0.1 до 1 массы Солнца. Участник может предположить некоторое распределение звезд по массам, что значительно усложнит выкладки. Такие решения оцениваются полностью, если распределение масс применимо для шаровых скоплений, в расчетах не делаются математические ошибки, а итог соответствует соотношению (6) для массы m от 0.1 до 1 массы Солнца. Если в качестве распределения взята начальная функция масс звезд (функция Солпитера), то при правильных выкладках оценка уменьшается на 1 балл, так как такой подход неприменим к шаровым скоплениям.

Возможная ошибка участника при решении: предположение, что для наблюдения линзирования все зоны от отдельных звезд покрывают все скопление на небе. Фактически, это условие, при котором вспышки происходят у звезды практически постоянно. При правильных расчетах это приводит к минимальному значению расстояния $L_M = D^2c^2/16GM =$ $=3$Гпк, вне зависимости от средней массы звезды. В этом случае первый этап решения оценивается полностью при условии его правильного выполнения, второй этап не оценивается, за третий этап выставляется максимум 1 балл.

11.6. СЖИМАЮЩИЙСЯ КАРЛИК

Условие. Звезда HD 49798 выглядит в телескоп как одиночная, но ее лучевая скорость колеблется с периодом T_0=1.55 дня, данные измерений лучевой скорости показаны на рисунке 1. Рядом с оптической звездой был обнаружен рентгеновский источник RX J0648.0–4418, оказавшийся белым карликом. Источник проявляет быструю переменность с периодом своего осевого вращения 13.2 секунды, но его максимумы регистрируются неравномерно, с задержкой τ, зависимость которой от орбитальной фазы также показана на рисунке 1. Еще позже выяснилось, что этот белый карлик сжимается и за счет этого ускоряет осевое вращение, его период уменьшается на $2.5\cdot10^{-15}$ секунды в секунду. Этот объект стал первым белым карликом, у которого был замечен процесс сжатия.

(1) Считая, что луч зрения лежит в плоскости круговых орбит двойной системы, определите массы оптической звезды и белого карлика.

(2) Пренебрегая изменением момента вращения белого карлика за счет аккреции газа с оптической звезды и считая, что он сжимается при постоянной массе, оцените, за какое время радиус белого карлика уменьшится на 1 км. Считать распределение плотности внутри белого карлика однородным. Приливное взаимодействие с оптической звездой не учитывать. На рисунке 2 приведена связь характерных значений масс и радиусов белых карликов (величины заданы в десятичных логарифмах отношения масс и радиусов к солнечным).

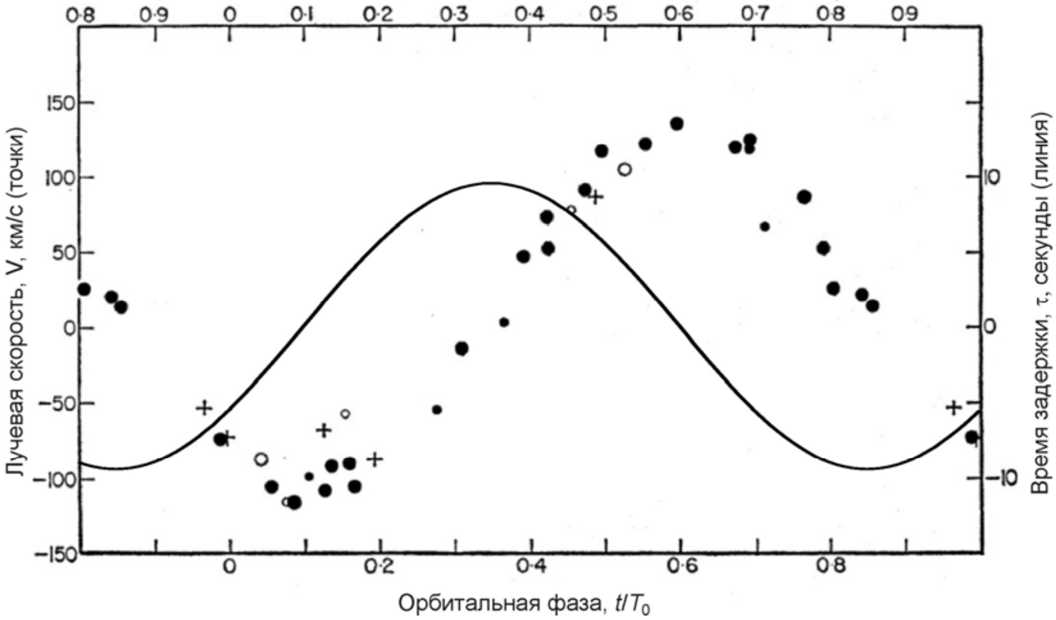


Рисунок 1.

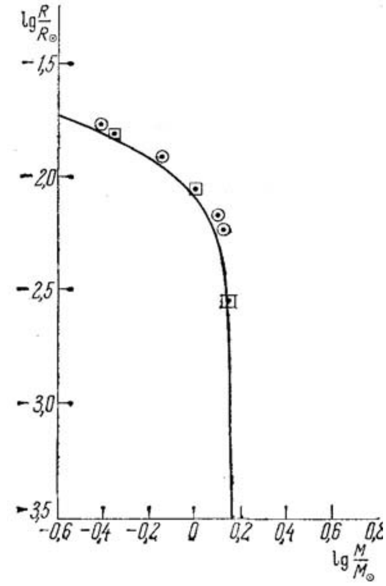
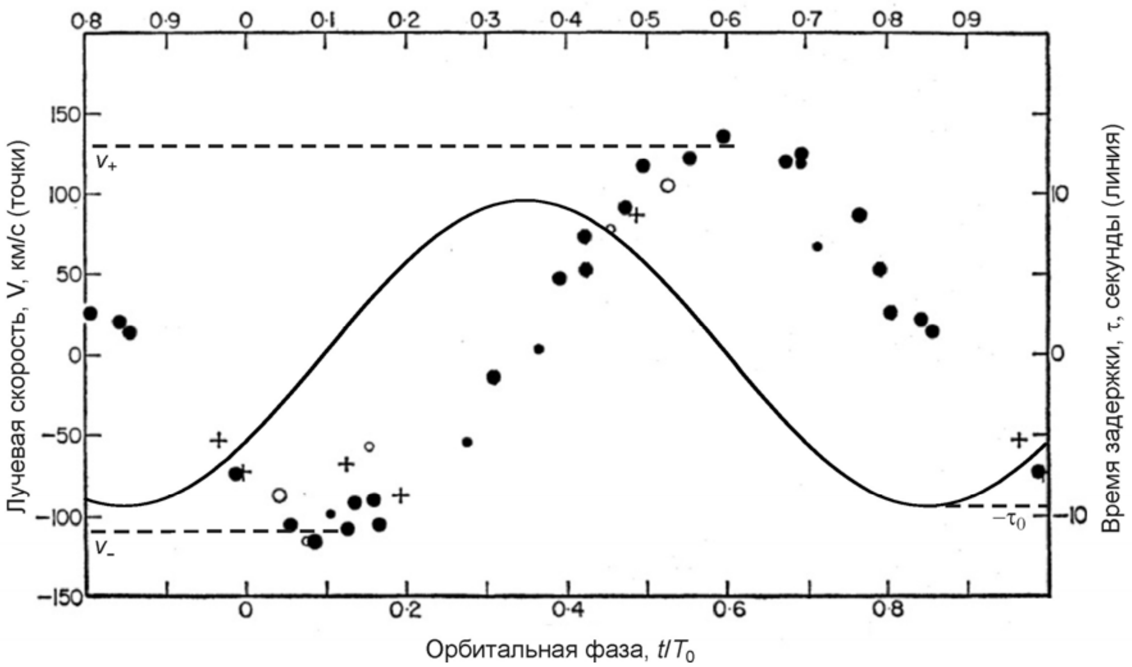


Рисунок 2.

Решение. По графику мы можем определить предельные значения лучевой скорости оптической звезды: v_+=+130 км/с, v_-=−110 км/с. Они не совпадают по модулю, следовательно, центр тяжести системы движется относительно наблюдателя со скоростью

$$u = (v_+ + v_-)/2 = 10 \text{ км/с}. \qquad (1)$$

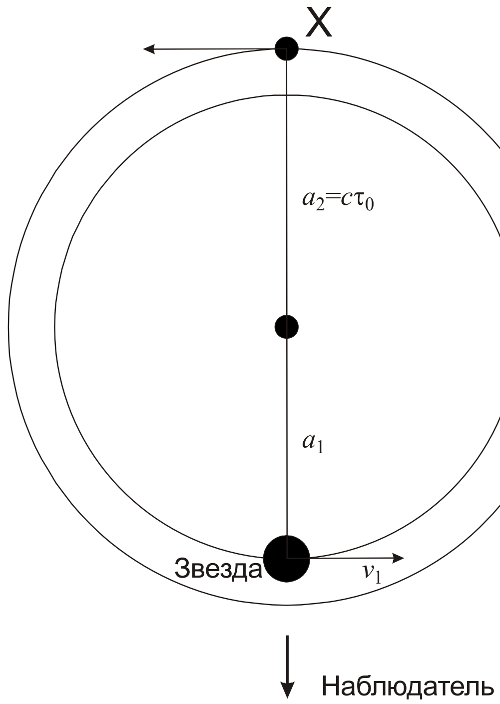


Так как луч зрения лежит в плоскости орбит звезд, орбитальная скорость оптической звезды есть

$$v_1 = v_+ - u = u - v_- = 120 \text{ км/с}. \qquad (2)$$

Орбиты в системе круговые, период нам известен. Тогда мы можем определить радиус орбиты оптической звезды:

$$a_1 = \frac{v_1 T_0}{2\pi} = 0.017 \text{ а.е.} \qquad (3)$$



В момент, показанный на рисунке, когда оптическая звезда оказывается ближе всего к наблюдателю, и ее лучевая скорость сравнивается с u и далее возрастает, рентгеновский источник, напротив, оказывается дальше всего, и сигнал от него приходит с максимальной задержкой. По графику мы видим, что график задержки – синусоида с амплитудой τ_0=9.5 секунд. Отсюда мы получаем радиус орбиты рентгеновского источника:

$$a_2 = c\tau_0 = 0.019 \text{ а.е.} \tag{4}$$

Выражая орбитальный период T_0 в годах (0.00424 года), мы получаем величину суммы масс звезд в массах Солнца из III закона Кеплера:

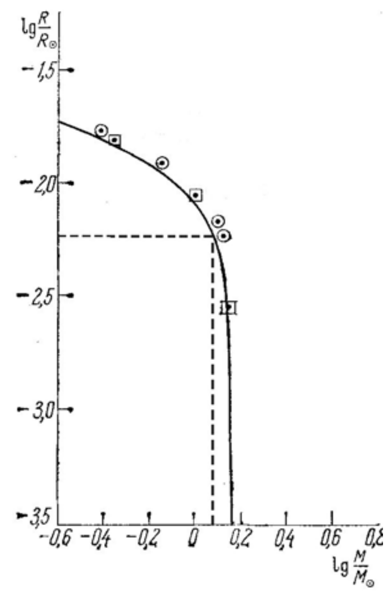
$$M = m_1 + m_2 = \frac{(a_1 + a_2)^3}{T^2} = 2.6. \tag{5}$$

Чтобы определить массы тел по отдельности, вспомним, что из определения центра масс $a_1m_1=a_2m_2$. Тогда

$$m_{1,2} = M\,\frac{a_{2,1}}{a_1 + a_2} = \frac{a_{2,1}(a_1 + a_2)^2}{T^2}. \tag{6}$$

Масса оптической звезды получается равной 1.4 массы Солнца, масса рентгеновского источника – 1.2 массы Солнца. В действительности, обе величины на 0.1 массы Солнца больше (мы не учитывали небольшой наклон орбиты к лучу зрения).

Теперь, зная массу белого карлика, мы можем найти его характерный радиус, пользуясь зависимостью, приведенной на графике. Оговоримся, что масса белого карлика близка к предельной, поэтому погрешности в ее определении могут существенно сказаться и на величине радиуса. Однако, радиус на графике задан в логарифмическом масштабе, и точности данных задачи в принципе достаточно для оценки его величины. При массе в 1.2 массы Солнца радиус белого карлика R составляет 4000 км.



Пусть ω – частота вращения белого карлика в текущий момент времени. Через какое-то время Δt она станет равной ω+Δω. При этом период вращения P уменьшится и станет равным $P-\Delta P$. Так как произведение частоты и периода есть постоянная величина (2π), то для малых изменений справедливо:

$$\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega}=\frac{P}{P-\Delta P}=\frac{P+\Delta P}{P}. \tag{7}$$

Отсюда $\Delta\omega/\omega=\Delta P/P$. Момент инерции белого карлика в начальный момент есть $I=km_2R^2$. Величина k равна 0.4, хотя для решения данной задачи это не принципиально, важно лишь сохранение коэффициента k во времени. Через время Δt радиус уменьшается на величину ΔR. По закону сохранения момента импульса

$$km_2(R-\Delta R)^2(\omega+\Delta\omega)\approx km_2R^2\omega-2km_2R\Delta R\omega+km_2R^2\Delta\omega=km_2R^2\omega. \tag{8}$$

Отсюда

$$\Delta R=R\frac{\Delta\omega}{2\omega}=R\frac{\Delta P}{2P}. \tag{9}$$

За время Δt период изменится на величину $\Delta P=P'\Delta t$, где P' – безразмерное изменение периода, заданное в условии задачи. Теперь мы можем найти время Δt, соответствующее заданному изменению радиуса ΔR:

$$\Delta t=\frac{\Delta P}{P'}=\frac{2P\Delta R}{P'R}\approx 3\cdot 10^{12}\ c\sim 10^{5}\ \textit{лет}. \tag{10}$$

За время наблюдений (около 20 лет) радиус белого карлика уменьшился примерно на 20 см, тем не менее этот эффект был фактически замечен рентгеновскими телескопами!

Источники данных:

1. Thackeray, A.D. The spectroscopic orbit of the O-type subdwarf HD 49798 // *Monthly Notices of Royal Academy of Sciences*, V.150, P.215-225, 1970.
2. Шкловский И.С. Звезды: их рождение, жизнь и смерть // М., Наука, 1985.

3. Mereghetti, S., Tiengo, A., Esposito, P., La Palombara, N., Israel, G.L., Stella, L. The discovery of a massive white dwarf in the peculiar binary system HD 49798/RX J0648.0–4418 // *Science*, V.325, P.1222, 2009.
4. Popov, S.B., Mereghetti, S., Blinnikov, S.I., Kuranov, A.G., Yungelson, L.R. A young contracting white dwarf in the peculiar binary HD49798/RX J0648.0–4418 // *Monthly Notices of Royal Academy of Sciences*, V.474, P.2750, 2018.

Система оценивания, максимум – 10 баллов (очередность этапов в решении участника может отличаться):

1 этап – 2 балла: определение радиуса орбиты оптической звезды. Требуемая точность – 0.002 а.е., при ошибке до 0.004 а.е. оценка уменьшается на 1 балл, далее – этап не засчитывается.

Вероятная ошибка при решении: опускание фактора скорости центра масс системы. Математически это может вызвать ошибку в орбитальной скорости порядка 10 км/с и в радиусе орбиты порядка 0.001 а.е., что допустимо. Поэтому оценка не снижается, если участник оговаривает, что скорость центра масс может существовать, но в данном случае мала. Если же эффект никак не рассматривается – оценка снижается на 1 балл без влияния на последующие этапы.

2 этап – 1 балл: определение радиуса орбиты рентгеновского источника. Требуемая точность – 0.001 а.е. В частности, участники могут считать величину τ_0 равной 10 секундам, что приведет к радиусу 0.02 а.е., это не изменяет оценку.

Вероятная ошибка при решении: неверная интерпретация эффекта запаздывания. Этап не засчитывается, последующие оцениваются, если сделанная в настоящий момент ошибка не делает их абсурдными. В частности, этап не засчитывается, если на его результат каким-либо образом влияет сама величина периода рентгеновского источника (13.2 секунды).

Вероятная ошибка при выполнении 1-2 этапов: попытка учета осевого или орбитального движения Земли. В действительности, эти эффекты не могут вызывать периодичность в 1.55 дня. Осевое вращение Земли имеет период того же порядка, но дает поправку в скорости менее 0.5 км/с, а во времени запаздывания – 0.02 секунды, что существенно меньше погрешностей измерения этих величин. Орбитальное движение Земли на таких временных масштабах дает поправку только к скорости движения центра масс u, не влияя на величины v_1, r_1, r_2. Если на том или ином этапе эти эффекты учитываются и вызывают отклонения, большие требуемой точности – соответствующий этап не засчитывается.

3 этап – 2 балла: определение суммарной массы системы. Может выполняться в общем виде без численного результата, при его записи требуемая точность (без учета ошибок на предыдущих этапах) составляет 10%, при ошибке до 30% оценка уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка при выполнении 1-3 этапов: вычисление общей массы либо массы одного из тел по III закону Кеплера из периода и радиуса орбиты какого-либо одного тела. Если берется только оптическая звезда, то масса получится около 0.3 масс Солнца, если только рентгеновский источник – около 0.4 масс Солнца (фактически, получаются значения функций масс вместо самих масс). Если эти величины фигурируют как сами массы какого-либо тела либо их сумма, то из 1-2 этапов засчитывается только тот, где делались вычисления радиусов орбит, за третий этап выставляется максимум 1 балл (при корректных вычислениях). Последующий, четвертый этап засчитывается только в том случае, если полученная величина трактуется как сумма масс, и дальше идет корректное вычисление масс по отдельности.

4 этап – 2 балла: вычисление масс каждого из тел (по 1 баллу). Требуемая точность (без учета ошибок на предыдущих этапах) – 10%.

Вероятная ошибка участника: неверное задание условия центра масс с перестановкой индексов. В результате, в качестве массы оптической звезды будет найдена масса рентгеновского источника и наоборот. 1 балл за этап не выставляется.

5 этап – 3 балла: вычисление времени, за которое радиус белого карлика уменьшится на 1 км. Необходимо обратить внимание, что незначительная погрешность определения массы белого карлика будет существенно влиять на его радиус. Это не изменяет оценку за выполнение 5 этапа, если масса не превышает предел Чандрасекара (в противном случае – см. комментарий).

Основным моментом этапа является правильная связь интервала времени, радиуса и его изменения, а также величины изменения периода (общий вид формулы (10)). При качественно ином характере связи этап не засчитывается полностью, вне зависимости от результата. При ошибке в численных коэффициентах (например, опущен фактор 2) оценка уменьшается на 1 балл. Если участник получает использует соотношение $\Delta P/P=\Delta R/R$ без обоснований через закон сохранения момента импульса, оценка уменьшается на 2 балла при отсутствии коэффициента 2 или неправильном коэффициенте и на 1 балл при правильном соотношении.

Комментарий: точности данных рисунка в принципе достаточно, чтобы получившаяся величина массы белого карлика при корректных вычислениях заведомо была меньше предела Чандрасекара. Тем не менее, участник в результате неточных вычислений может получить и большее значение. В этом случае 1-4 этапы засчитываются в соответствии с описанными выше критериями, без дополнительных штрафных санкций. Последующий, 5 этап в этом случае может быть засчитан 2 баллами, только если участник в явном виде оговаривает, что получил завышенное значение массы в результате неточности вычислений и принимает адекватное значение радиуса белого карлика (от 1000 до 6000 км). Без явного указания на факт неточности вычислений и физического несоответствия массы и природы компактной звезды 5 этап не засчитывается.

Автор заданий: О.С. Угольников,
за исключением: 9-3 (Мигающий глаз Медузы) – Е.Н. Фадеев